НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 62-50

Оморов Роман Оморович,
техника илимдеринин доктору, профессор, КР УИА-нын корреспондент-мүчөсү,
Эл аралык жана Улуттук инженердик академиялардын академиги

ИНТЕРВАЛДЫК ДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫН БЕКЕМ (РОБАСТТЫК) ТУРУКТУУЛУГУНУН МАСЕЛЕЛЕРИ

Оморов Роман Оморович,
доктор технических наук, профессор, член-корр. НАН КР,
академик Международной и Национальной инженерной академии

ПРОБЛЕМЫ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Roman Omorovich Omorov,
Doctor of Technical Sciences, Professor, Corr. Member NAS KR, Academishian of the International and National Academy of Engineering

PROBLEMS OF ROBUST STABILITY OF INTERVAL DYNAMIC SYSTEMS

Аннотация. Бекем (робасттык) туруктуулукту изилдөөнүн жыштык жана алгебралык багыттары каралат. жыштык же Цыпкин-Поляк багыты кыскача баяндама иретинде талкууланат. Алгебралык же Харитонов багыты кененирээк каралат, тактап айтканда, алгебралык - Харитоновдук бекем (робасттык) туруктуулуктун багытын иштеп чыгуунун алкагында иштелип чыккан интервалдык динамикалык системалардын бекем (робасттык) туруктуулугунун алгебралык ыкмасынын негизги жоболору жана натыйжалары берилген. Автордун эмгектеринде Харитоновдун үчүнчү теоремасынын түрүндөгү теоремасы далилденген. Дискреттик учур үчүн Харитоновдун теоремасынын дискреттик аналогу берилген, ал Шур теоремасынын негизинде алынган. Мында үзгүлтүксүз абалдын аналогунун теоремасы үчүн колдонулган чекиттер жана үзгүлтүктөрдүн интервалдары түшүнүктөрү киргизилет. Дискреттик системалардын бекемдигин (робастуулугун) аныктоонун алгоритми берилген.
Негизги сөздөр: бекем (робасттык) туруктуулук, интервалдык динамикалык системалар, бекем туруктуулуктун жыштык жана алгебралык багыттары, бекем туруктуулуктун алгебралык ыкмасы, үзгүлтүксүз жана дискреттик сызыктуу интервал системалары, интервал матрицасы, матрицалык көп жактуулук, Харитоновдук бурчтук полиномдору, Харитоновдун теоремасы.

Аннотация. Рассматриваются частотные и алгебраические направления исследований робастной устойчивости. Частотное или направление Цыпкина-Поляка рассмотрено кратко в обзорном порядке. Алгебраическое или Харитоновское направление рассматривается более шире, а именно представлены основные положения и результаты Алгебраического метода робастной устойчивости интервальных динамических систем, разработанного в рамках развития алгебраического - Харитоновского направления робастной устойчивости. В работах автора доказана теорема типа третьей теоремы Харитонова. Для дискретного случая представлен дискретный аналог теоремы Харитонова, который получен на основе теоремы Шура. При этом, введены понятия точек и интервалов перемежаемости, используемые для теоремы аналога непрерывного случая. Сформулирован алгоритм определения робастности дискретных систем.
Ключевые слова: робастная устойчивост, интервальные динамические системы, частотное и алгебраическое направления робастной устойчивости, алгебраический метод робастной устойчивости, непрерывные и дискретные линейные интервальные системы, интервальная матрица, многогранник матриц, угловые полиномы Харитонова, теорема Харитонова.

Abstract. The frequency and algebraic directions of robust stability research are considered. The frequency or Tsypkin-Polyak direction is considered briefly in an overview manner. The algebraic or Kharitonov direction is considered more broadly, namely, the main provisions and results of the Algebraic method of robust stability of interval dynamic systems developed within the framework of the development of the algebraic - Kharitonov direction of robust stability are presented. In the author's works, a theorem of the type of the third Kharitonov theorem is proved. For the discrete case, a discrete analog of Kharitonov's theorem is presented, which is obtained on the basis of Schur's theorem. At the same time, the concepts of points and intervals of intermittency used for the theorem of the analogue of the continuous case are introduced. An algorithm for determining the robustness of discrete systems is formulated.

Key words: robust stability, interval dynamic systems, frequency and algebraic directions of robust stability, algebraic method of robust stability, continuous and discrete linear interval systems, interval matrix, matrix polyhedron, Kharitonov angular polynomials, Kharitonov theorem.

Заманбап башкаруу теориясын иштеп чыгууда системалардын бекемдиги жана сезбестиги маселелерине кызыгуу өсүүдө [1-9]. Сезбестик проблемасы менен тыгыз байланышта болгон бекемдик (робасттык) маселелери дүйнөнүн көптөгөн өлкөлөрүнүн окумуштууларынын жана изилдөөчүлөрүнүн эмгектеринин дарысы (предмети) болуп саналат [3-11].

Адабияттардагы бекемдиктин салттуу түшүнүгү системалардын бир системанын эмес, тигил же бул жол менен аныкталган системалардын жыйындысынын белгилүү бир касиеттерин сактоо жөндөмдүүлүгү катары, ал эми сезбестикти окшош системалардын топологиясынын бир аз бузулушу менен траекторияга фазалык мейкиндиктин бөлүштүрүлүшүнүн сапаттык сүрөтүн сактоо үчүн системалардын касиети катары аныктайт [1, 2, 6-12].

Түздөн-түз башкаруу системаларына келсек, азыркы учурда бекем туруктуулук маселелери абдан кылдат каралып, чечилди. Бул маселелерди чечүү биринчи кезекте В.Л. Харитоновдун эмгектеринде чагылдырылган, анда интервалдык көп мүчөлөр (полиномдор) үчүн бекемдик (робасстык) туруктуулук маселелери чечилген [13, 14].

Алгач сезбес (төмөн сезгичтик) системаларды анализдөө жана синтездөө боюнча иштер сезгичтик теориясынын өнүгүшү менен байланышкан [15]. Статистикалык маалыматты иштеп чыгууда бекемдик маселеси боюнча биринчи шарттар коюлган жана чечилген.

Азыркы кезге чейин бекем жана сезбес сызыктуу эмес башкаруу системаларын куруу маселелери жетиштүү карала элек.

Белгилүү болгондой, В.Л. Харитоновдун эмгектери [13, 14], робасттык туруктуулуктун азыркы теориясынын негизи болуп калды.

Бул эмгектерде В.Л. Харитонов төмөнкү интервалдык көп мүчөлөрдүн (полиномдордун) туруктуулугу жөнүндө маселелерди чечкен

$$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n, \quad (1)$$

мында $a_i\epsilon[\underline{a}_i,\overline{a}_i]$, $i=\overline{0,n}$ - $\underline{a}_i\leq a_i\leq\overline{a}_i$ ($a_i\epsilon[\underline{a}_i,\overline{a}_i]$) интервалдарында көрсөтүлгөн коэффициенттер, $\underline{a}_i,\overline{a}_I$ - тиешелүүлүгүнө жараша төмөнкү жана жогорку чектеринин a_i, $i=\overline{0,n}$ нин коэффициенттери.

[13]- макалада маселе реалдуу коэффициенттери бар көп мүчөлөр (1) үчүн, ал эми [14] макалада комплекстүү коэффициенттери үчүн чечилген. Чыныгы жана татаал көп мүчөлөрдүн (1) бүткүл көпчүлүгүнүн бекем туруктуулугу үчүн зарыл жана жетиштүү шарттар, тиешелүүлүгүнө жараша, *Харитоновдун көп мүчөлөрү (полиномдору)* деп аталган төрт жана сегиз (жупташкан) бурчтук көп мүчөлөрдүн туруктуулугу экендиги көрсөтүлгөн.

Учурда робасттык туруктуулуктун теориясында көптөгөн жаңы натыйжалар алынды, биринчи кезекте кыр теоремасы жана Харитоновдун теоремаларынын дискреттик аналогдору жана версиялары. Советтик жана орусиялык окумуштуулар — Я.З. Цыпкин, Б.Т. Поляк, Ю.И. Неймарктар Михайлов, Найквист жана D-бөлдүрүү сыяктуу бекем туруктуулуктун жыштык критерийлерин иштеп чыгышкан [7-9].

Бул макала интервалдык динамикалык системалардын робасттык туруктуулугунун алгебралык багытынын маселелерине арналган. *Бекем туруктуулуктун алгебралык ыкмасы* деп аталган үзгүлтүксүз жана дискреттик убакытта сызыктуу интервалдык динамикалык системалардын робасстык туруктуулугун изилдөө усулунун негизги жоболору жана натыйжалары каралат [16–21].

Проблеманын коюлушу

Үзгүлтүксүз n тартиптеги сызыктуу динамикалык системалар каралат

$$\dot{x} = \mathbf{A}x,\ x(t_0) = x_0\,, \qquad (2)$$

жана, дискреттүү

$$x(m+1) = \mathbf{A}x(m),\ m = 1,2,3,\ldots, \qquad (3)$$

мында $x=x(t)\epsilon R^n$, $x(m)$ абалдын векторлору, $\mathbf{A}\epsilon R^{nxn}$ - $\underline{a}_j, \overline{a}_j, \underline{a}_j \le \overline{a}_j$ - бурчтук маанилери бар интервалдык чоңдуктарды билдирген $a_{ij}, i,j=1,\ldots,n,$ $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ - элементтери бар интервалдык матрица.

Ошентип проблема (2) жана (3) системалардын робасттык туруктуулук шарттарын аныктоодо болот.

1. Үзгүлтүксүз системалар

Негизги жыйынтыктар. Каралып жаткан усул боюнча фундаменталдуу макалада [12] так далилденген теорема 1 жана анын леммасы системанын мүнөздөмөлүү көп мүчөлөрүнүн (2) ырааттуу өзүнчө бурчтук коэффициенттеринен $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ түзүлгөн Харитоновдун төрт бурчтук көп мүчөлөрүнүн (полиномдорунун) Гурвиц шарттарында системалардын бекем (робасттык) туруктуулугу түрүндөгү жыйынтыктар алынган:

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0\,. \qquad (4)$$

Бул теореманы жана лемманы берели.

Теорема 1. *(2) системасынын x=0 тең салмактуулук абалы* $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ *бардыгы үчүн же* **A** *интервалдык матрицасы үчүн туруктуу болушу үчүн, бардык төрт бурчтук Харитоновдун көп мүчөлөрү (2) системанын мүнөздүү көп мүчөлөрүнүн (4) удаалаш өзүнчө бурчтук коэффициенттеринен* $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ *түзүлүшү зарыл жана жетиштүү.*

Бул теорема төмөнкү лемманын негизинде далилденген.

Лемма. Өзүнчө бурчтук коэффициенттер $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ **A** матрицасынын элементтеринин $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ бурчтук маанилеринде же кээ бир элементтердин нөлдүк маанилеринде (эгерде мүчөлүк аралыгы нөлдү камтыса) көп мүчөлөрдүн (4) тиешелүү коэффициенттери катары түзүлөт.

Леммадан оңой эле көрүнүп тургандай, $b_i,(\underline{b}_i,\overline{b}_i, i=\overline{1,n})$ коэффициенттерди табуу үчүн жалпы учурда сызыктуу эмес программалоонун оптималдаштыруу ыкмаларын колдонуу зарыл.

Далилдөөсү [16] тиркемесинде келтирилген теорема 1 ге карата төмөнкүдөй тактоочу эскертүү жасалышы керек.

Эскертүү. Төрт бурчтук Харитоновдун көп мүчөлөрүнүн болушуна байланыштуу теорема 1- ди далилдөөнүн негизги аргументинен, төрт бурчтуу көп мүчөнүн толук жыйындысы (жыйнагы) жок болгон учурда теорема 1-дин шарттары зарыл, бирок (2) системанын туруктуулугу үчүн жетишсиз болушу мүмкүн экени келип чыгат.

Мындай учур (4) көп мүчөлөрдүн (полиномдордун) өзүнчө бурчтук коэффициенттери бири-бири менен байланышып, акырында бурчтук коэффициенттердин жыйындысын төрттөн аз санга чейин тарылтканда жогорудагы *эскертүүгө* дал келген жагдай келип чыгышы мүмкүн.

Далилденген теорема 1-дин негиздүүлүгү [21]-де келтирилген Биалас теоремасына [22] белгилүү каршы мисалдарды жокко чыгаруу менен айкын ырасталат.

2. Дискреттик системалар

Белгилүү болгондой, [26] макаланын жарыяланышы көптөгөн изилдөөчүлөрдүн Харитоновдун [4–8, 17, 22] теоремаларынын дискреттик аналогдорун издөөгө түрткү берген. Ошентип, [6] макалада азыркы учурда алсыз жана күчтүү Харитонов теоремаларынын дискреттик аналогдору алынганы, бирок Харитоновдун теоремаларынын бул аналогдору коэффициенттердин интервалдык аймактарына белгилүү бир чектөөлөр коюлгандыгы белгиленген. Бул чектөөлөр [17, 18] макалаларда алынып салынган, мында Харитоновдун теоремаларынын аналогдору Шур теоремасы [23] аркылуу алынган. Ошондой эле [17, 18] интервалдык матрицалар жана матрицалык көп кырдуулуктар боюнча иштин [16] натыйжаларынын дискреттик аналогдору болгон теоремалар формулировкаланган.

Төмөндө, үзгүлтүксүз системалар үчүн жогоруда келтирилген корутундуларды эске алуу менен [17, 18] дискреттик системалар үчүн алынган натыйжалар каралат.

Негизги натыйжалар. Дискреттик системалар үчүн z-кайта түзүүсүн колдонуу менен интервалдык мүнөздөмө көп мүчөнү (полиномду) алабыз

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum b_i z^{n-i}, \quad b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \ \underline{b}_i \leq \bar{b}_i \ . \qquad (5)$$

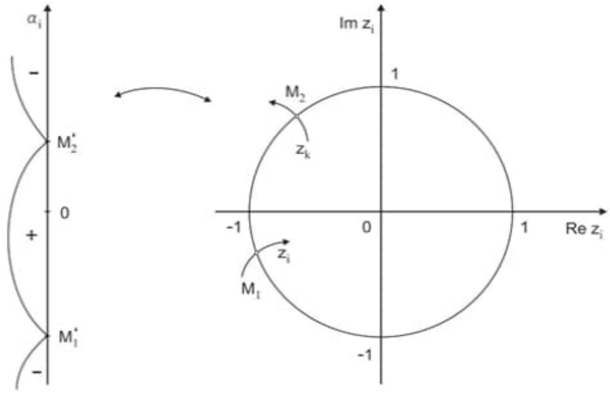
Туруктуулук шарттарын аныктоо үчүн Шур теоремасын [23] колдонобуз, б.а. шарттары төмөнкүдөй болгон

$$|b_0| > |b_n|,$$

кайталануу салыштырмалык менен аныкталган көп мүчөлөрдүн ырааттуулугу үчүн

мында $(i = 1, \overline{n-2}$ тиешелүүлүгүнө жараша i- лик $(i = 1, \overline{n-2})$ $f(z)$ көп мүчөнүн улуу жана кенже коэффициенттери.

Аныктама. $b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], i = \overline{0,n}$ коэффициенттер үчүн *алмашуу чекиттери* деп, (8) көп мүчөнүн тамырлары тамырлар тегиздигинде бирдик тегеректи кесип өткөн реалдуу огтун чекиттерин атайбыз, ал эми *алмашуу интервалдары* деп, тиешелүүлүгүнө жараша, тамырлар бирдик тегеректин ичинде же сыртында болгон интервалдарды атайбыз (1-сүрөт).



1. Сүрөт. a_i коэффициентинин *алмашуу чекиттери* (M_1', M_2') жана *интервалдары* $(-\infty, M_1')^-$, $[M_1', M_2']^+$, $[M_2', +\infty)^-$.

[17] макалада дискреттик интервалдык системалардын робасттык туруктуулук шарттарын аныктоо боюнча негизги жыйынтыктар тиешелүү 1–6 теоремалар түрүндө берилген. Белгилей кетчү нерсе, жогоруда көрсөтүлгөндөй, үзгүлтүксүз системалар үчүн [16], 5-теореманын негиздүүлүгү теорема 1-дин эскертүүсүнө байланыштуу чектөөгө ээ, б.а. 5-теорема 4 түрдүү Харитонов көп мүчөлөрүнүн толук жыйындысы үчүн туура.

Натыйжалардын [17, 18], Харитоновдун күчтүү теоремасынын аналогуна карата тууралыгы белгилүү каршы мисалдар [21] аркылуу көрсөтүлөт.

Ошентип, дискреттик интервалдык динамикалык системалардын робасттык туруктуулугун аныктоонун *алгоритми* төмөнкүдөй болот.

1. 1-теореманын [16] леммасынын формулаларын колдонуп, **А** интервалдык матрицасынын $b_i \in \left[\underline{b}_i, b_i\right], i = 0, n$ элементтерин оптималдаштыруу жолу менен (5) интервалдык мүнөздөмө көп мүчөнүн $b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], i = \overline{0, n}$ өзүнчө бурчтук коэффициенттерин табабыз.

2. (5) интервалдык көп мүчөгө туура келген төрт Харитоновдук көп мүчө аныкталат

$$f_3(z): \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots,\}; \; f_4(z): \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \overline{b}_4 \ldots,\}$$

$$f_3(z): \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 \ldots,\}; \; f_4(z): \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \overline{b}_4 \ldots,\}$$

3. [17] макаланын тиркемесинде көрсөтүлгөн (П.2) типтеги n теңсиздик түзүлөт.

4. Ар бир $b_i, i = 0, n$ коэффициентке карата, белгиленген калган коэффициенттерди эске алуу менен, *алмашуунун чекиттери* бардык төрт Харитонов көп мүчөлөр үчүн жана бардык n теңсиздиктер үчүн (3-пунктту караңыз), төмөнкү даражалардан баштап табылат.

5. Эгерде бардык $b_i, i = 0, n$ коэффициенттер үчүн бардык *алмашуу чекиттери* берилген интервалдарга кирбесе, анда баштапкы көп мүчө (система) (5) туруктуу, антпесе ал туруксуз болот.

Корутунду. Харитоновдык багытта бул макалада каралган интервалдык динамикалык системалардын бекем (робасттык) туруктуулугун изилдөөнүн *алгебралык усулу* (ыкмасы) системанын интервалдык матрицасынын жалпы формасы менен робасттык туруктуулук маселесин чечүүгө мүмкүндүк берүүчү [16, 17] макалалардын негизги натыйжаларын андан ары өнүктүрүү болуп саналат. Усул сызыктуу үзгүлтүксүз жана сызыктуу дискреттик интервалдык динамикалык системалар үчүн бекем туруктуулук маселелерин чечүүгө багытталган.

Белгилей кетчү нерсе, теорема 1-ге берилген *Эскертүү* [16] - нын натыйжаларын олуттуу түрдө тактайт, тактап айтканда, интервалдык динамикалык системалардын бекем туруктуулугун аныктоо үчүн төрт бурчтуу Харитоновдук көп мүчөлөрүдүн толук комплексинин (көп мүчөлөрдүн көптүгүн эске алуу менен) зарылдыгын баса белгилейт. Ошондой эле, теорема 1 боюнча зарылдык жана жетиштүүлүк шарттары системанын мүнөздүү көп мүчөсүнүн 1-ден n-коэффицентине чейин ырааттуу түрдө аныкталган бурчтук өзүнчө коэффициенттерге туура келет, аларды сызыктуу эмес программалоо усулдарынын (методдорун) колдонуу менен табууга болот.

Адабияттар

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы //Докл. АН СССР, 1937. Т.14. No 5. С. 247-250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т.169). - М.: Наука. 1985. - С. 59-93.
3. Dorato P.A. Historical review of robust control // IEEE Contr. Syst. Magazine. 1987. V.7. №2. P.44-47.
4. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I.Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991 №1. - С. 3-23.
5. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. №2. - С. 3-30.
6. Джури Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. №5. С.4-28.
7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т.32.М.: ВИНИТИ. 1991.-Т.32. – С. 3-31.
8. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. №1. – С. 165-176.

9. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. №7 – С. 10-18.

10. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. №8. – С. 36-45.

11. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления // Автореферат диссертации доктора технических наук / - Л.: ЛИТМО, 1993. – 38 с.

12. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика, 2002, № 8. – С. 37-53.

13. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. – С. 2086-2088.

14. Харитонов В.Л. Об одном обобщении критерия устойчивости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1978. №1. – С. 53-55.

15. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

16. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. №1. - С. 22-27.

17. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. №3. - С. 3-7.

18. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии, 2002, №3. С. 5-10.

19. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. – Бишкек: Илим, 2018. - 104 с.

20. Оморов Р.О. Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364-370.

21. Оморов Р.О. Чувствительность, робастность и грубость динамических систем. – М.: ЛЕНАНД, 2021. -304 с.

22. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices // Int. J. Control 1983. V.37.№4. P. 717-722.

23. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем.– М.: Физматгиз, 1958. –724 с.