УДК 517.968

Сражидинов Адил
к.ф.- м. н., профессор,
Кызылкийский гуманитарно-педагогический институт БатГУ
Сражидинов Адил
ф-м.и.к., профессор,
Кызыл-Кыя гуманитардык-педагогикалык институт БатМУ
Srashidinov Adil
candidate of physical - mathematical sciences, professor,
Kyzyl-Kiya Humanitarian-Pedagogica lnstitute Batken State University

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ СВЕРТОЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Аннотация. В случае, когда названное в заголовке уравнение можно свести таким или иным способом к эквивалентному уравнению второго рода, то, вообще говоря, нахождение его приближенных решений в пространствах $L_2[0,1]$ или $C[0,1]$, можно сказать достаточно исследованным. В связи с этим мы считаем, что относительно названного уравнения не имеет места типа вышеупомянутых условий.

В данном сообщении рассматривается вопрос о построении непрерывных приближений к точному непрерывному решению сверточного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. При этом широко используется известная теория вполне непрерывных симметричных линейных операторов в гильбертовом пространстве, в частности разложение L_2 – функций в ряд Фурье по системе ортонормированных функций ядра с разностным аргументом $a(t-s)$. Кроме того, применяется так называемый метод перехода для уравнений свертки, предложенный автором в [9].

Ключевые слова. Сверточное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, уравнение Фредгольма второго рода с малым параметром, теория вполне непрерывных симметричных линейных операторов, гильбертово пространство, метод перехода для уравнений свертки, разложение функций в ряд Фурье.

ВОЛЬТЕРРДИН БИРИНЧИ ТЕКТЕГИ ТҮЙҮНДҮҮ ТЕҢДЕМЕСИНИН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ЧЕЧИМИН ЖАКЫНТАШТЫРЫП АНЫКТОО

Аннотация. Макаланын аталышында айтылган теңдеме тигил же бул ыкма менен ага экваленттүү болгон экинчи тартиптеги теңдемеге келтирилген учурларда жетишерлик изилденген. $C[0,1]$ же $L_2[0,1]$ мейкиндиктеринде Вольтеррдин биринчи тектеги түйүндүү интегралдык теңдемесинин жогоруда белгилинген шарттарда чечимдерин жакындаштырып табуу максатка ылайыктуу. Сунушталган макала ушул багатта экендигин белгилейбиз. Макаланын жыйынтыктарын алууда гильберт мейкиндигиндеги толук үзгүлтүксүз симметриялуу сызыктуу опрераторлор теориясы, айрым алганда L_2 – функцияларын ядро a(t-s) тин ортнормалдаштырылган өздүк функциялары боюнча Фурьенин катарына ажыратуу каралган. Андан сырткары, автор тарабынан [9] сунушталган түйүндүү теңдемелер үчүн өтмөк методу да каралды.

Негизги сөздөр. Вольтеррдин биринчи тектеги түйүндүү интегралдык теңдемеси, Фредгольмдын экинчи тектеги параметирлуу интегралдык теңдемеси, толук үзгүлтүксүз симметриялуу сызыктуу операторлор теориясы, гильберт мейкиндиги, түйүндүү теңдемелер үчүн өтмөк методу, функцияларды Фурьенин катарына ажыратуу.

CONTINUOUS APPROACHES TO THE SOLUTION OF THE CONVOLUTIONAL INTEGRAL VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND

Abstract. In the case when the equation named in the title can be reduced in one way or another to an equivalent equation of the second kind, then, generally speaking, finding its approximate solutions in the spaces L2[0,1] or C[0,1] can be said to be sufficiently studied. In this regard, we believe that the above-mentioned conditions do not hold with respect to the named equation

This message addresses the issue of constructing continuous approximations to the exact continuous solution of the Volterra convolutional integral equation of the first kind. In this case, the well-known theory of completely continuous symmetric linear operators in Hilbert space is widely used, in particular the expansion of L2 functions in a Fourier series in a system of orthonormal kernel functions with a difference argument a(t-s). In addition, the so-called transition method for convolution equations, proposed by the author in [9], is used.

Keywords. Volterra convolution integral equation of the first kind, Fredholm equation of the second kind with a small parameter, theory of completely continuous symmetric linear operators, Hilbert space, transition method for convolution equations, Fourier series expansion of functions.

Введение. Рассмотрим сверточное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1, \qquad (1)$$

где $a(t)$, $f(t)$ – известные непрерывные функции на [0,1], т.е функции из пространства C[0,1], а $\varphi(t) \in C[0,1]$ – искомое решение. К уравнению вида (1) приводятся многие практические задачи, например, исторически задача Абеля о таутохроне (1823 г.), а также исследования различных задач астрономии, геодезии и других, см., монографию [1]. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1, \qquad (2)$$

на построение их регуляризации исследовались в работах [1- 6] и других. В основном в этих работах в определенных условиях, например, при $K(t,t)$=1 в качестве регуляризации уравнения рассматривается возмущенное уравнение второго рода вида

$$\varepsilon\varphi_\varepsilon(t) + \int_0 K(t,s)\varphi_\varepsilon(s)ds = f(t), 0 \le t \le 1$$

и доказывается $\max_t |\varphi_\varepsilon(t) - \varphi(t)| \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, или в среднем. Уравнения (1) как частный случай линейного интегрального уравнения (2) обладает многими свойствами нежели последних. Мы рассмотрим уравнение (1), вообще говоря, в случаях, когда относительно его невозможно делать подобные утверждения. Из вышеизложенного вытекает, что построение непрерывных приближений к непрерывному решению – задача актуальная, а также представляет теоретический интерес.

Материалы и методы исследования. Рассмотрим уравнение (1) при следующих условиях:

а) ядро-функция $a(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, $a(0)=0$ и $a(t)$ тождественно не обращается в нуль на $[0,\alpha]$ при любом $\alpha > 0$;

б) решение $\varphi(t)$ уравнения (1) абсолютно непрерывно на $[0,1]$ и $\varphi(0)=0$.

Для единственности решения в классе $L_2[0,1]$ в силу известной теоремы Титчмарша о свертке [7,8], достаточно, чтобы ядро-функция $a(t)$ принадлежала классу $L_2[0,1]$ и почти всюду тождественно не равна нулю на $[0,\alpha]$ при любом $\alpha > 0$. Так что из условия а) следует единственность искомого решения. Далее применяя к уравнению (1) метод перехода для уравнений свертки [9], получаем эквивалентное ему уравнение

$$\int_0^2 \omega(|t-s|)y(s)ds = F(t)+F(2-t), 0 \le t \le 2,$$

где $y(s)$ – искомое решение из $L_2[0,2]$,

$$\omega(t)=\begin{cases} 0, 0 \le t \le 1, \\ a(t-1), 1 < t \le 2, \end{cases} \quad F(t)=\begin{cases} 0, 0 \le t \le 1, \\ f(t-1),\ 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\lambda\, z(t) = \int_0^2 \omega(|t-s|)z(s)ds\ , 0 \le t \le 2\ . \tag{3}$$

В силу того, что уравнение $\Omega y = 0$, где

$$\Omega y = \int_0^2 \omega(|t-s|)y(s)ds, 0 \le t \le 2, \tag{4}$$

в $L_2[0,2]$ имеет только нулевое решение, заключаем полноту систему ортонормированных функций оператора $\Omega : L_2 \to L_2$. С целью выделить некоторые необходимые нам свойства оператора Ω из (4) приведем их [9].

Определение 1.Функция $u(t) \in L_2[0,2]$ называется четной (нечетной) на [0,2], если $u(t)=u(2-t)$ (соответственно $u(t)= - u(2-t)$) при всех $t \in [0,2]$.

Так как Ω переводит четную (нечетную) на [0,2] функцию в четную (нечетную) функцию, то можно считать любое решение уравнения (3) является четной или нечетной функцией на [0,2]. Притом, если λ- собственное число уравнения (3) , отвечающее четной собственной функции $u(t)$, то $(-\lambda)$ – собственное число, отвечающее нечетной собственной функции

$$v(t) = \begin{cases} u(t), 0 \le t \le 1, \\ -u(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases}$$

и, наоборот. Далее введем

Определение 2. Нечетная на [0,2] функция $v(t)$ называется напарницей функции $u(t)$, если

$$u(t) = \begin{cases} v(t), 0 \le t \le 1, \\ v(2-t), 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Из (3) в силу последнего свойства заключаем, что сужение на [0,1] собственной четной на [0,2] функции и ее напарницы совпадают.

Пусть $z(t) \in L_2[0,2]$- четная на [0,2] собственная функция уравнения (3). Тогда непосредственно получаем

$$\lambda\varphi_i(1-t) = \int_0^t a(t-s)\varphi_i(s)ds, 0 \le t \le 1, \qquad (5)$$

где $\varphi_i(t) = z(t)$ при $0 \le t \le 1$, т.е. $\varphi_i(t)$ – сужение *функции* $z(t)$ на [0,1] . А если $\varphi_i(t)$- решение уравнения (5), то, очевидно, что функция

$$z(t) = \begin{cases} \varphi_i(t), 0 \le t \le 1, \\ \varphi_i(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases}$$

является решением уравнения (3). Поэтому имеет место [9].

Лемма 1 Если $\{u_i(t)\}$- система четных на [0,2] ортонормированных собственных функций уравнения (3), то система их сужений $\sqrt{2}\{u_i(t)\}$ на [0,1] является ортонормированной системой собственных функций уравнения (5) в пространстве $L_2[0,1]$, и , наоборот, т.е. если $\{\varphi_i(t)\}$ система ортонормированных функций уравнения (5), то система $\{u_i(t)\}$, где

$$u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \varphi_i(t), 0 \le t \le 1, \\ \varphi_i(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases}$$

является ортонормированной системой в $L_2[0,1]$ четных на [0,2] собственных функций уравнения (3), а собственные значения этих уравнений (3) и (5) одни и те же.

Аналогично можно показать, что если $v(t)$ – нечетная на [0,2] собственная функция уравнения (3) при $\lambda=\lambda_0$, то ее сужение $\sqrt{2}v(t)$ на [0,1] является собственной функцией уравнения (5) при $\lambda= -\lambda_0$, и, наоборот , т.е. если $\varphi_i(t)$- собственная функция уравнения (5) при $\lambda=\lambda_0$, то функция

$$v_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \varphi_i(t), 0 \le t \le 1 \\ -\varphi_i(2-t), 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

является нечетной на [0,2] собственной функцией уравнения (3) при $\lambda= -\lambda_0$.

Пусть $y(t) \in L_2[0,1]$-любое решение уравнения.

$$\int_0^t a(t-s)y(s)ds = 0, 0 \le t \le 1, \qquad (6)$$

Тогда функции

$$u(t) = \begin{cases} y(t), 0 \le t \le 1, \\ y(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} y(t), 0 \le t \le 1 \\ -y(2-t), 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

являются решениями уравнения

$$\int_0^2 \omega(|t-s|)z(s)ds = 0, 0 \le t \le 2. \qquad (7)$$

Тогда сумма

$$u(t)+v(t)= \begin{cases} 2\,y(t), 0 \le t \le 1 \\ 0, 1 \le t \le 2, \end{cases} \qquad (8)$$

также является решением уравнения (7). Поэтому $z(s)$ как решение уравнения (7) перпендикулярно [10] всем собственным функциям уравнения (3), т.е. в пространстве $L_2[0,2]$

$z(s) \perp z_I(s)$, i=1,2,...,

или более подробно

$\int_0^2 z_i(s)z(s)ds = 0$, i=1,2,... .

Отсюда с учетом (8) получаем в $L_2[0,1]$

$y(s) \perp y_I(s)$, i=1,2,... . (9)

Мы установили , что если $y(s) \in L_2[0,1]$- решение уравнения (6), то имеют место соотношения (9). Теперь мы покажем, что справедливо и обратное. Пусть выполняются соотношения (9) . Тогда для четных на [0,2] функций

$$u_i(t) = \begin{cases} y_i(t), 0 \le t \le 1 \\ y_i(2-t), 1 \le t \le 2, \end{cases} \qquad (10)$$

и в силу того , что $z(s)$- решение уравнения (7), имеем

$$0 = \int_0^1 y_i(s)y(s)ds = \int_0^2 z_i(s)z(s)ds.$$

Для нечетных на [0,2] функций

$$v_i(t) = \begin{cases} y_i(t), 0 \le t \le 1 \\ -y_i(2-t), 1 \le t \le 2, \end{cases} \qquad (11)$$

доказывается совершенно аналогично. Итак нами установлена [9]

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y(s) \in L_2[0,1]$ было решением уравнения (6), необходимо и достаточно перпендикулярности функции $y(s)$ ко всем собственным функциям уравнения (5).

В нашем случае уравнение (6) имеет только нулевое решение, поэтому система $\{y_i(t)\}$ является в пространстве $L_2[0,1]$ полной ортонормированных функций. Следует заметить, что видно из (10) и (11), если $i \neq j$, то $y_i(s) \perp y_j(s)$.

Перейдем к построению непрерывных приближений для решения уравнения (1). Из (1) непосредственно получаем

$$\int_0^{1-t} a(1-t-s)\varphi(s)ds = f(1-t), 0 \le t \le 1. \quad (12)$$

В качестве регуляризации уравнения для (1) возьмем возмущенное уравнение

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma ds, \quad (13)$$

где ε- положительный параметр. Уравнение (13) с учетом (12) имеет вид

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma ds,$$

т.е. $\varepsilon^2 \Delta_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\Delta_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \varepsilon^2\varphi(t),$ (14)
где

$$\{\varphi_i(t)\} \quad (15)$$

Так как $\{\varphi_i(t)\}$ - полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$, то любая функция из $L_2[0,1]$,в частности решение уравнения (1) разлагается в ряд Фурье по указанной системе

$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\varphi_i(t), \varphi_k = \int_0^1 \varphi_k(s)\varphi(s)ds, k = 1, 2, ...$, т.е.

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\varphi_i(t), \varphi_k = \int_0^1 \varphi_k(s)\varphi(s)ds, k = 1, 2, ... \quad (16)$$

Искомое решение уравнение (15) ищем в виде

$$\Delta_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta_{\varepsilon i}\varphi_i(t), 0 \le t \le 1. \quad (17)$$

Подставим (17) и (16) в уравнение (14), получим

$$\{\varphi_i(t)\}$$

Отсюда в силу линейной независимости $\{\varphi_i(t)\}$ имеем

$\Delta_{\varepsilon i} = \varphi_i \varepsilon^2 / (\varepsilon^2 + \lambda_i^2)$, т.е. $\Delta_{\varepsilon i} = \varphi_i \varepsilon^2 / (\varepsilon^2 + \lambda_i^2)$,

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{\varepsilon i}|^{-} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^{-}. \tag{18}$$

то

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{\varepsilon i}|^{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^{2}. \tag{19}$$

Значит ряд (17) при любом ε сходится в среднем. Его сумму обозначим через $\Delta_\varepsilon(t)$. Итак мы убедились в том, что уравнение (14) при любом ε имеет единственное решение $\Delta_\varepsilon(t)$ и это решение разлагается в среднем в ряд Фурье (17) по системе $\Delta_\varepsilon(t) \to 0, \varepsilon \to 0$.Теперь сначала покажем, что сходимость $\Delta_\varepsilon(t) \to 0, \varepsilon \to 0$ в среднем. Обозначим

$$S_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2 + \lambda_i^2), \; R_N(t) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi_i \varphi_i(t)/(\varepsilon^2 + \lambda_i^2), \tag{20}$$

т.е. где $S_N(t)$ - N-ая частичная сумма функционального ряда (17), $R_N(t)$- соответствующий остаток. Из (20) в силу оценок (18) и (19) имеем

$\| R_N(t) \|^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2$.

Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^2$ – сходящийся, то для любого числа $\delta > 0$ найдется номер N, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^2 < \delta^2 /2 . \tag{21}$$

Далее для выбранного N из (21) фиксируем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы

$$\| S_N(t) \|^2 < \delta^2 /2 , \; \varepsilon \in [0,\varepsilon_0] . \tag{22}$$

Из (21) и (22) находим $\| S_N(t) \| + \| R_N(t) \| < \delta$, т.е.

$$\| \varphi(t) - u_\varepsilon(t) \| < \delta , \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]. \tag{23}$$

Из (23) в силу произвольности $\delta > 0$ находим, что $\| \varphi(t) - u_\varepsilon(t) \| \to 0, \varepsilon \to 0,$ т.е. $u_\varepsilon(t)$ из (13) в среднем сходятся к решению $\varphi(t)$ при $\varepsilon \to 0.$ Теперь рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 v_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s) \int_0^{1-s} a(1-s-\sigma) v_\varepsilon(\sigma) d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s) f'(1-s) ds, \tag{24}$$

$0 \leq t \leq 1,$ Из (1) в силу $\varphi(0) = 0$ имеем

$$f'(t)=\int_0^t a(t-s)\varphi'(s)ds,\varphi(0)=0.$$

Где штрих сверху означает производную соответствующей функции. Откуда

$$f'(1-t)=\int_0^{1-t} a(1-t-s)\psi(s)ds,\psi(s)=\varphi'(s). \quad (25)$$

Так как $\varphi(t)$ абсолютно непрерывная функция на [0,1], поэтому $\varphi(s)=\int_0^s \varphi'(\sigma)d\sigma,\varphi(0)=0$

принадлежит классу $L_2[0,1]$ и $\varphi(s)=\int_0^s \varphi'(\sigma)d\sigma,\varphi(0)=0$. Из уравнения (24) в силу (25) следует, что

$$\varepsilon^2\pi_\varepsilon(t)+\int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\pi_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds=\varepsilon^2\psi(t),0\le t\le 1.$$

где $\pi_\varepsilon(t)=\psi(t)-v_\varepsilon(t).$ Здесь также, поступая как и выше, получаем

где $\psi(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\varphi_i(t),\pi_\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{\varepsilon i}\varphi_i(t),$ и $\pi_{\varepsilon i}$ – коэффициенты Фурье, т.е.

$$\psi_i=\int_0^1\varphi_i(s)\psi(s)ds,\pi_{\varepsilon i}=\int_0^1\varphi_i(s)\pi(s)ds,i=1,2,\ldots.$$

Отсюда, как и выше, получаем $\|\ \pi_{\varepsilon i}\ \|\to 0,\varepsilon\to 0$, т.е. в среднем

$$\left\|\psi(t)-v_\varepsilon(t)\right\|\to 0,\varepsilon\to 0. \quad (26)$$

В силу (26) получаем

$$\left|\varphi(t)-\int_0^t v_\varepsilon(s)ds\right|=\left|\int_0^t\psi(s)ds-\int_0^t v_\varepsilon(s)ds\right|\le\int_0^t\left|\psi(s)-v_\varepsilon(s)\right|ds\le\int_0^1\left|\psi(s)-v_\varepsilon(s)\right|ds\le\left[\int_0^1\left|\psi(s)-v_\varepsilon(s)\right|^2ds\right]^{1/2},$$

т.е.

$$\left|\varphi(t)-\int_0^t v_\varepsilon(s)ds\right|\le\left\|\psi(s)-v_\varepsilon(s)\right\|. \quad (27)$$

Из неравенства (27) согласно соотношению (26) вытекает, что

$$\max_{0\le t\le 1}|\ \varphi(t)-\int_0^t v_\varepsilon(s)ds\ |\to 0,\varepsilon\to 0,$$

другими словами, интегралы решений уравнений (24) от 0 до $t\in[0,1]$ равномерно на [0,1] сходятся к точному решению уравнения (1).

Итак, справедлива

Теорема 2. Пусть 1) $a(t) \in C[0,1]$ и $a(t)$ тождественно не обращается в нуль на $[0,\alpha]$ при любом $\alpha \in (0,1)$;

2) решение φ(t) уравнения (1) абсолютно непрерывно на $[0,1]$ и φ(0)=0.

Тогда интегралы решений уравнений (24) в (0,t) равномерно на $[0,1]$ стремятся к решению φ(t) уравнения (1), т.е.

$$\max_{0\le t\le 1} |\varphi(t) - V_\varepsilon(t)| \to 0, \varepsilon \to 0,$$

где $V_\varepsilon(t) = \int_0^t v_\varepsilon(s)ds. \; 0 \le t \le 1.$ (28)

Теперь в условиях а) и б) рассмотрим вопрос нахождения функции $V_\varepsilon(t)$ из (28) непосредственно из уравнений (24) . Так как

$$\int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)v_\varepsilon(\sigma)d\sigma = \int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)dV_\varepsilon(\sigma) = V_\varepsilon(\sigma)a(1-s-\sigma)\Big|_0^{1-s} +$$

$$+\int_0^{1-s} a'(1-s-\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma = V_\varepsilon(1-s)a(0) - V_\varepsilon(0)a(1-s) + \int_0^{1-s} a'(1-s-\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

и $V_\varepsilon(0) = 0, a(0) = 0,$ то

$$\varepsilon^2 v_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a'(1-s-\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)f'(1-s)ds. \quad (29)$$

Равенство (24) в силу (29) имеет вид

$$\varepsilon^2 v_\varepsilon(t) + \int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a'(1-s-\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^{1-t} a(1-t-s)f'(1-s)ds. \quad (30)$$

Пользуясь формулами Дирихле ко второму слагаемому левой части (30), получаем тождество

$$\int_0^{1-t} a(1-t-s)\int_0^{1-s} a'(1-s-\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma ds = \int_0^t \left\{\int_0^{1-t} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)ds\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_t^1 \left\{\int_0^{1-\sigma} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)ds\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma.$$

Поэтому уравнение (30) принимает вид

$$\varepsilon^2 v_\varepsilon(t) + \int_0^t P(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_t^1 Q(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma = g(t), \quad (31)$$

где

$$P(t,\sigma) = \int_0^{1-t} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)ds,\ Q(t,\sigma) = \int_0^{1-\sigma} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)ds, \quad (32)$$

$$g(t) = \int_0^{1-t} a(1-t-s)f'(1-s)ds, \quad (33)$$

Интегрируя обе части уравнения (31) по t∈[0,x], где x ∈[0,1], получаем

$$\varepsilon^2 V_\varepsilon(x) + \int_0^x\int_0^t P(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma dt + \int_0^x\int_t^1 Q(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma dt = \int_0^x g(s)ds, 0 \le x \le 1, \quad (34)$$

Здесь также пользуясь формулами Дирихле ко второму и третьему слагаемым левой части (34), получаем

$$\int_0^x\int_t^1 Q(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma dt = \int_x^1 \left\{\int_0^x Q(t,\sigma)dt\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_0^x \left\{\int_0^\sigma Q(t,\sigma)dt\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma.$$

$$\int_0^x\int_t^1 Q(t,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma dt = \int_x^1 \left\{\int_0^x Q(t,\sigma)dt\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_0^x \left\{\int_0^\sigma Q(t,\sigma)dt\right\}V_\varepsilon(\sigma)d\sigma.$$

Тогда (34) принимает вид

$$\varepsilon^2 V_\varepsilon(t) + \int_0^x [P_1(x,\sigma) + Q_2(x,\sigma)]V_\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_x^1 Q_1(x,\sigma)V_\varepsilon(\sigma)d\sigma = g_1(t), 0 \le x \le 1, \quad (35)$$

с учетом обозначений (32), (33), а также на основании следующих равенств

$$g_1(x) = \int_0^x\int_0^{1-t} a(1-t-s)f'(1-s)dsdt,\ Q_1(x,\sigma) = \int_0^x \left\{\int_0^{1-\sigma} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)ds\right\}dt$$

$$Q_2(x,\sigma) = \int_0^\sigma\int_0^{1-\sigma} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)dsdt \quad P_1(x,\sigma) = \int_\sigma^x\int_0^{1-t} a(1-t-s)a'(1-s-\sigma)dsdt$$

Итак доказана

Теорема 3. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда непрерывному решению φ(t) уравнения (1) равномерно на [0,1] стремятся решения $V_\varepsilon(t)$ уравнений (35).

Выводы Из уравнений (35) следует, что их непрерывные решения на столько близки к точному решению уравнению (1), на сколько малы параметры ε, другими словами,

$$\max_{0 \le t \le 1} | \varphi(t) - V_\varepsilon(t) | \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Допустимая нижняя грань параметра ε определяется от возможности вычислительной техники и характера задачи. Преимуществом рассмотрения уравнения (35) заключается в том, что для нахождения их приближенных решений не надобности найти системы собственных функций и собственных чисел ядра *a(t-s)* , а потребуется лишь определить приближенное непрерывное решение (35) при фиксированном значении ε. Поэтому для этого можно пользоваться каким-либо соответствующим методом приближенного вычисления.

Литература

1. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы.- Новосибирск: Наука.1999. -193с.

2. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл.АН СССР, 309, №5, 1989.-С.1052-1055

3. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода и третьего рода // Журн. вычислит. математики и матфизики, 19, №4, 1979. -С.970-989

4. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода//Докл.АН.СССР,197, №3, 1971.-С.531-534

5. Денисов А.Н. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода//Журн. вычислит. математики и матфизики. 15, №4.-С.1053-1056 (1975)

6. Сражилинов А. Регуляризация интегрального уравнения первого рода типа Вольтерра с неточными данными//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-Фрунзе,1988.-Вып.21.-С.57-67

7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье . – М., Л.:ОГИЗ, 1948. – 480 с.

8. Titchmarash E.C. The zeros of certain integral functions//Proc.London Math.Soc.-1926. Vol.25, №2.-P.283-302

9. Сражидинов А. Метод перехода для уравнений свертки и некоторые его применения//Тезисы докл. V Международ. научно-практич. конф. ИННОВАЦИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. КУЛЬТУРА 22 апреля 2022г. Тюмен: Тюмен. инд.унив. 2022. -С.188-192

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. :Учеб. для мат. спец.ун-тов, -3-е изд., перераб . –М.:Наука , 1972. - 496 с.