АВТОМАТИКА И МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 517.93

Оморов Роман Оморович,
доктор технических наук, профессор, член-корр. НАН КР,
академик Международной и Национальной инженерной академий,
Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук
Кыргызской Республики (ИМА НАН КР)

ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГЕОДИНАМИКИ

СИНЕРГЕТИКАЛЫК ГЕОДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨ ҮЧҮН ТОПОЛОГИЯЛЫК СЕЗБЕСТИК УСУЛУНУН КОЛДОНУУСУ

APPLICATIONS OF THE METHOD OF TOPOLOGICAL ROUGHNESS TO THE STUDY OF SYNERGETIC SYSTEMS OF GEODYNAMICS

Аннотация. Рассматривается метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову-Понтрягину и именуемый «методом топологической грубости». Приведены определения понятий максимальной грубости и минимальной негрубости динамических систем, сформулированы соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях их достижимости, а также возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем, которые были доказаны в работах автора. Метод позволяет управлять грубостью систем на основе теоремы, сформулированной с использованием матричного уравнения Сильвестра в особых точках фазового пространства. Основные этапы исследований грубости и бифуркаций систем с помощью рассматриваемого метода сформулированы в виде соответствующего алгоритма. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. В работах автора метод апробирован на примерах многих синергетических систем, таких как аттракторы Лоренца и Рёсслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и др. В данной работе возможности метода используются для исследования геодинамических синергетических процессов в области подготовки сильных землетрясений.

Ключевые слова: *топологическая грубость динамических систем, синергетические системы и хаос, особые точки фазового пространства, матричное уравнение Сильвестра, число обусловленности матриц, максимальная грубость и минимальная не грубость систем, бифуркации систем.*

Аннотация. Андронов-Понтрягин боюнча сезбестик концепциясына негизделген динамикалык системалардын сезбестиктерин изилдөө усулу каралат жана «топологиялык сезбестик усулу» деп аталат. Динамикалык системалардын максималдуу сезбестигин жана минималдуу сезбестик эместиги түшүнүктөрүнүн аныктамалары берилген, аларга жетишүү үчүн зарыл жана жетиштүү шарттар, ошондой эле динамикалык системалардын топологиялык структураларынын бифуркацияларынын пайда болушу боюнча тиешелүү теоремалар аныкталган, алар автордун эмгектеринде далилденген. Бул усул фазалык мейкиндиктин сингулярдуу чекиттеринде Сильвестр матрицалык теңдемесин колдонуу менен аныкталган теореманын негизинде системалардын сезбестигин башкарууга мүмкүндүк берет. Каралып жаткан усулду колдонуу менен системалардын сезбестигин жана бифуркацияларын изилдөөнүн негизги этаптары тиешелүү алгоритм түрүндө берилген. Усул динамикалык системалардын сезбестигин жана бифуркацияларын, ошондой эле синергетикалык системаларды жана ар кандай физикалык мүнөздөгү хаосту изилдөө үчүн колдонулушу мүмкүн. Автордун эмгектеринде усул көптөгөн синергетикалык системалардын мисалдары аркылуу сыналган, мисалы Лоренц жана Рёсслер аттракторлору, Белоусов-Жаботинский, Чуа, "жырткыч-жеми" системалары, Хенон, Хопф бифуркациялары ж.б. Бул макалада усул күчтүү жер титирөөлөргө даярдануу аймактарында геодинамикалык синергетикалык процесстерди изилдөө үчүн колдонуусу көргөзүлгөн.

Негизги сөздөр: *динамикалык системалардын топологиялык сезбестиги, синергетикалык системалар жана хаос, фазалык мейкиндиктин сингулярдуу чекиттери, Сильвестрдин матрицалык теңдемеси, матрицалардын шарт саны, системалардын максималдуу сезбестиги жана минималдуу сезбес эместиги, системалардын бифуркациялары.*

Abstract. A method for studying the roughness of dynamic systems based on the concept of roughness according to Andronov-Pontryagin and called the «method of topological roughness» is considered. The definitions of the concepts of maximum roughness and minimum roughness of dynamic systems are given, the corresponding theorems are formulated on the necessary and sufficient conditions for their attainability, as well as the occurrence of bifurcations of topological structures of dynamic systems, which were proved in the author's works. The method allows you to control the roughness of systems based on the theorem formulated using the Sylvester matrix equation at singular points of the phase space. The main stages of studying the roughness and bifurcations of systems using the considered method are formulated in the form of an appropriate algorithm. The method can be used to study the roughness and bifurcations of dynamic systems, as well as synergetic systems and chaos of various physical nature. In the works of the author, the method was tested on the examples of many synergetic systems, such as attractors of Lorenz and Rössler, Belousov-Zhabotinsky, Chua, «predator-prey», Henon, Hopf bifurcations, etc. In this paper, the method is used to study geodynamic synergetic processes in the area preparing strong earthquakes.

Key words: *topological roughness of dynamical systems, synergetic systems and chaos, singular points of phase space, Sylvester matrix equation, condition number of matrices, maximum roughness and minimum non-roughness of systems, bifurcations of systems.*

Введение

Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-3].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову – Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε– близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4].

В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову – Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем [6, 7], а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [8-11].

В данной работе рассматриваются основы «метода топологической грубости», а также возможные приложения этого метода для исследования геодинамических синергетических процессов и систем [12, 13].

Основные положения метода

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре.

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А. А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \qquad (1)$$

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ - вектор фазовых координат (далее обозначение времени t, если не оговорено, для краткости опускаем), $\mathbf{F}$ – n – мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}})$ – дифференцируемая малая по какой либо норме $\|\cdot\|$ n – мерная вектор-функция, являются ε – тождественными в топологическом смысле.

Определение грубости по Андронову-Понтрягину представлены в работах [1, 2, 9, 11].

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности. $C\{\mathbf{M}\}$ – матрицы $\mathbf{M}$ - нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятия максимальной грубости и минимальной не грубости систем, на отношениях пары малых чисел δ и ε.

Определение 1. *Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ – близости систем (1) и (2), приводящая к ε – тождественности, будет (для каждого ε > 0) максимальна.*

Определение 2. *Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N,* *если величина ε –тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого δ > 0) минимальна.*

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной не грубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работе [5].

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки ($\mathbf{z}_0$) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической –минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$\mathbf{M}^* = argmin\, C\{\mathbf{M}\}$,

где $\mathbf{M}$ *- матрица приведения линейной части* $\mathbf{A}$ *системы (1) в особой точке* ($\mathbf{z}_0$) *к диагональному (квазидиагональному) базису,* $C\{\mathbf{M}\}$*- число обусловленности матрицы* $\mathbf{M}$.

Замечание 1. *Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых* $C\{M\} = \infty$. *Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества. При этом, системами с* $C\{\mathbf{M}\} = \infty$ *будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц* $\mathbf{A}$.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [5, 8-11], позволяют управлять грубостью синергетических систем, с использованием матричного уравнения Сильвестра и методов нелинейного программирования [14], соответствующая теорема доказана в работах [8, 11].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев разработанных в работах [8 - 11]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В диссертационной работе [8] доказана соответствующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы в области G многомерной (n > 2) динамическая система при значении параметра* $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, $\mathbf{q} \epsilon R^p$ *возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:*

- либо 1), в рассматриваемой области G, динамической системы существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\{\mathbf{M}(\mathbf{q}^*)\} = \min \sum Ci\,\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \qquad (3)$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

- либо 2), в области G динамической системы , имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие

$$C\{\mathbf{M}(q^*)\} = \infty. \qquad (4)$$

Замечание 2. *Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (3) или (4) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория – ОТ или ПЦ, удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (3) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (3) отвечают ПЦ.*

Приложения метода для исследований геодинамических синергетических процессов и систем

В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [6, 7].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук – физики, химии, биологии, геологии, геофизики и кончая неточными областями наук, такими как экономика, социология, психология, философия, распознавание образов, а также в области техники и технологий [6, 7, 9 - 11].

Одним из явлений в синергетических системах, вызывающих огромное внимание исследователей в различных областях науки, являются так называемые странные аттракторы, представляющие притягивающие многообразия в фазовом пространстве с хаотическим поведением (хаосом) траекторий в этих многообразиях [6, 7, 11].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости», основы которого изложены выше.

В геофизике одной из сложных и крупных научных проблем является проблема прогнозирования землетрясений. Одним из предвестниковых параметров, используемых при прогнозировании землетрясений служит параметр плотности сейсмогенных разрывов K_{cp} [15], который базируется на современной теории прочности твердых тел [16, 17].

Геофизическая среда представляет собой открытую самоорганизующуюся динамическую систему, а геофизические процессы, в том числе сейсмические, являются нелинейными синергетическими процессами. Эволюция процессов геофизической системы происходит через неустойчивость, хаос и бифуркационные изменения.

Активные области Земли, в том числе Тянь-Шань и их тектонические структуры находятся в условиях геодинамической, в частности, напряженно-деформированной неустойчивости.

В сейсмических процессах наблюдаются такие типичные структуры самоорганизации, как спиральные волны или ориентированные треугольники, вихри или ориентированные многоугольники и др. более сложные структуры, которые наблюдаются в полях плотности сейсмогенных разрывов (K_{cp}) и суммарной сейсмической энергии.

Для исследования сейсмических явлений, на основе анализа физических процессов, происходящих в твердом теле, получена математическая модель

$$\dot{K}_{cp} = \alpha K_{cp}^{\ 2} - \beta K_{cp} + \gamma. \qquad (5)$$

где $_{\beta,\alpha}$- скорость притока, β, α - коэффициенты возникновения (развития) и залечивания (исчезновения) трещин соответственно.

Как альтернативная к модели (5) предложена следующая модель, составленная на основе ретроспективного анализа множества землетрясений, характерных для территории Кыргызской Республики

$$\dot{x} = \frac{\alpha(\beta - z)}{4a_0x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3}, \dot{y} = \frac{\alpha(\beta - z)}{2b_0y + b_1}, \dot{z} = \alpha(\beta - z), \qquad (6)$$

где $a_i, i = \overline{0,3}; b_j, j = 0,1$ - числовые коэффициенты.

На основе моделей (5), (6) используя критерии бифуркаций (3), (4) исследованы ряд землятрясений произошедших на территории Кыргызской Республики. Эти исследования подтверждают возможность использования критериев возникновения бифуркаций динамических систем для эффективного прогнозирования места и времени сильных землетрясений. При этом исследования показывают, что точность прогнозов зависит от шага дискретизации съема сейсмической информации во времени и пространстве.

Заключение

В работе рассмотрены основные положения метода топологической грубости систем, разработанной автором. Дана библиография основных публикаций автора, в которых получены фундаментальные результаты в области теории грубости и бифуркаций динамических систем в целом и синергетических систем в частности. Приложения метода к синергетическим системам и хаосу использованы для исследований многих систем, таких как аттракторы Лоренца иРесслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и др. [9 - 11]. Модельные исследования ряда землетрясений, произошедших в Кыргызской Республике, показывают эффективность полученных теоретических результатов и перспективность развития предложенного метода к прогнозированию сейсмокатастроф.

Литература

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14. — № 5. — С. 247 – 250.

2. *Аносов Д.В.* Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). - М.: Наука, -1985. - С. 59-93.

3. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. - М.: ВИНИТИ, -1991. - С. 3-31.

4. *Peixoto M.M.* On structural stability, Ann. Math., 1959, vol. 69, no 1, pp. 199-222.

5. *Оморов Р.О.* Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и Телемеханика. --1991. -№ 8. - С. 36-45.

6. *Хакен Г.* Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. -М.: -Мир, -1985. – 423 с.

7. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного: Введение / Пер. с англ. -М.: -Мир, -1990.

8. *Оморов, Р.О.* Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Автореф. дисс. докт. техн. наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, -1993. – 38 с.

9. *Оморов Р.О.* Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Известия НАН КР. 2009. № 3. – С. 144-148.

10. *Omorov R.O.* Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. V. 44. No 4. Pp. 61-70.

11. *Omorov R.* Theory of Topological Roughness of Systems: Applications to Synergetic Systems and Chaos. Beau Bassin: Lap Lambert, 2019, 220 p.

12. *Оморов Р.О.* Прогнозирование землетрясений: Синергетический подход // Проблемы автоматики и управления. – 1997. - № 1. – С. 103-111.

13. *Оморов Р.О., Омуралиев М.О., Землянский А.А.* Исследование динамической модели процессов деформации горных массивов в период подготовки сильного землетрясения // Изв. НАН КР. – 2012. - № 4. – С. 73-79.

14. *Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В.* Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами. – Бишкек: Илим, 1991. – 61 с.

15. *Соболев Г.А., Завьялов А.Д.* О концентрационном критерии сейсмогенных разрывов // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 252. - № 1. – С. 69-71.

16. *Журков С.Н.* Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестник АН СССР. -1968. - № 3. – С. 46-52.

17. *Берштейн В.А.* Механо-гидролитические процессы и прочность твердых тел. – Л.: Наука. -1988. – 318 с.