ФИЗИКА PHYSICS

УДК 551.556

Асанов[1] Д. С.,
канд. физ.-мат.наук
Asanov D.S.,
cand. Ph. - Math sciences

Гайнутдинова[2] Р. Дж.,
доктор физ.-мат. наук
Gainutdinova R.Dz.,
Dr. Ph. - Math sciences

Канцырев[1] Б.Л.,
доктор физ.-мат. наук
Kantsyrev B.L.,
Dr. Ph. - Math sciences

[1]Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва
Institute of Oceanology named after P.P. Shirshov RAS, Moscow

[2]Институт физики НАН КР им. академика Ж. Жеенбаева
Institute of physics of the NASciences named after acad. Zh. Zheenbaev

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА В БЕЗЫНЕРЦИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

АТМОСФЕРАЛЫК АБАНЫН УБАКЫТСЫЗ ЖАКЫНДАЛУУДА ВЕРТИКАЛДЫК ЫЛДАМДЫГЫНЫН ТЕҢДЕМЕСИ

EQUATION FOR VERTICAL VELOCITY OF ATMOSPHERIC AIR IN NONINERTIAL APPROXIMATION

Аннотация. Рассмотрены условия безынерционного приближения уравнения для вертикальной скорости влажного атмосферного воздуха, при которых можно считать малой инерцию вертикального и горизонтального движения. Полученное уравнение может быть использовано при расчётах атмосферных процессов.

Аннотация. Нымдуу атмосфералык абанын вертикалдык ылдамдыгы үчүн теңдеменин инерциясыз жакындашынын шарттары каралат, мында вертикалдык жана горизонталдык кыймылдын инерциясы кичине деп эсептелиши мүмкүн. Алынган теңдеме атмосфералык процесстерди эсептөөдө колдонулушу мүмкүн.

Abstract. Conditions of inertia-free approximation of equation for vertical velocity of humid atmospheric air at which low inertia of vertical and horizontal motion can be considered are analyzed. The obtained equation can be used in calculating atmospheric processes.

Ключевые слова: *уравнение неразрывности, квази-статичность, безынерционность, теорема Тейлора-Праудмена.*

Негизги сөздөр: *үзгүлтүксүздүк теңдемеси, квазистатикалык, инерциясыз, Тейлор-Прудмен теоремасы.*

Keywords*: continuity equation, quasi-static, noninertionality, Taylor-Proudman theorem.*

Введение. В работе Р.И. Нигматулина [1] были рассмотрены уравнения циркуляции атмосферы, в которых уравнение вертикальной компоненты импульса обычно рассматривается в безынерционном приближении. При этом, исходя из нестационарного уравнения неразрывности и баланса тепловой энергии, было рассмотрено уравнение для вертикальной скорости воздуха ***w*** (которое, вообще говоря, не является квази-статичным из-за влияния горизонтальных ускорений) :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\mathrm{div}_{\mathrm{H}}(\vec{\mathrm{v}}) - \frac{\dot{\mathrm{M}}}{\gamma \mathrm{M}} + \frac{(\gamma-1)Q'}{\gamma g \mathrm{M}} - \frac{[\vec{\mathrm{v}}\nabla(p)]_{\mathrm{H}}}{\gamma p}\ , \tag{1}$$

где γ - показатель адиабаты для воздуха, g-ускорение силы тяжести,

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{z}}^{\mathrm{H}(t)} \rho \mathrm{d}z, \quad \dot{\mathrm{M}} = -\int_{\mathrm{z}}^{\mathrm{H}(t)} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) \mathrm{d}z, \tag{1а}$$

$$\mathrm{div}_{\mathrm{H}}(\vec{\mathrm{v}}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\ , \tag{1б}$$

$$[\vec{\mathrm{v}}\nabla(p)]_{\mathrm{H}} = u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1в}$$

где Q' - полный объемный приток тепла в атмосферу за счет излучения, турбулентной теплопроводности, поглощения радиации, u и v – горизонтальные компоненты скорости ветра. $\mathrm{H}(t)$- высота постулированной «верхней границы атмосферы», давление на которой соответствует табличному значению и является граничным условием, обеспечивающим применимость модели сплошной среды.

Исходя из анализа характерных величин параметров атмосферы в работе [1] был сделан вывод о малости (1в) в уравнении (1), который подтверждается в настоящей работе. Поэтому в работе [1] уравнение (1) было представлено в форме :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\mathrm{div}_{\mathrm{H}}(\vec{\mathrm{v}}) - \frac{\dot{\mathrm{M}}}{\gamma \mathrm{M}} + \frac{(\gamma-1)Q'}{\gamma g \mathrm{M}} \qquad (1д)$$

В дальнейшем сопоставление слагаемых (1б) и (1в) в уравнении (1) проведено для области «свободной атмосферы» и для приземной области на основании рассуждений, аналогичных доказательству теоремы Тейлора-Праудмена [2] . Кроме того, рассмотрены дополнительные условия, при выполнении которых в соотношении для «горизонтальной» части дивергенции скорости в (1) (то есть переносимого ветром потока массы) применимо допущение о малости горизонтальных ускорений $\boldsymbol{a}$. Действительно, в наиболее известных работах А.С. Монина и А.М. Яглома [3], а также С.С. Зилитинкевича [4] рассматриваются безынерционные подходы к моделированию приземного слоя, поэтому уточнение условий применимости допущения о квази-стационарности уравнений модели [1] актуально.

Квази-статическая модель. Действуя по аналогии с [5] введем местную систему координат с осью ‘x’- направленной ($\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$) вдоль земной параллели на восток, осью ‘y’- направленной ($\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$) вдоль меридиана на север и осью ‘z’- направленной ($\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}}$) вверх вдоль местной вертикали. Запишем уравнение движения в форме модели Тейлора-Экмана, где кинематическая турбулентная вязкость ν^{τ} в соответствии с гипотезой Буссинеска представлена так же, как и в уравнениях Рейнольдса [6]:

$$\Omega_x = 0,\ \Omega_y = \Omega\cos(\varphi),\ \Omega_z = \Omega\sin(\varphi),\ \boldsymbol{a} = \mathbf{e}_1 a_x + \mathbf{e}_2 a_y + \mathbf{e}_3 a_z,\ \boldsymbol{v} = \mathbf{e}_1 u + \mathbf{e}_2 v + \mathbf{e}_3 w$$

$$\boldsymbol{a} + 2[\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \boldsymbol{g} + \nu^{\tau}\mathbf{e}_1\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu^{\tau}\mathbf{e}_2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{2}$$

здесь φ – угол географической широты, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость вращения Земли, $\boldsymbol{a}$ – ускорение, $\boldsymbol{v}$ – скорость с компонентами (u,v,w) вдоль координатных осей, $\rho=\rho(T,p,\kappa_v)$ – соответствует гомогенной смеси совершенных газов; сухого воздуха и водяных паров, T - температура, p – давление, κ_v – массовая доля водяных паров. ν^{τ} – вертикальный коэффициент турбулентного переноса.

В соответствии с [1] для необходимой в дальнейшем конкретизации производной атмосферного давления по времени $\frac{\partial p}{\partial t}$, проинтегрируем по координате z вертикальную компоненту (2) и получим в приближении, безынерционном по вертикали (то есть для $\varepsilon = \left|\frac{(2\Omega\cos(\varphi) - a_z)}{g}\right| \ll 1$) :

$$p = g\int_z^{H(t)} \rho dz, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = g\int_z^{H(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + g\left(\rho\frac{dH}{dt}\right)_{z=H(t)}, \tag{3}$$

откуда, учитывая вид уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$,

получим из (3) :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g\dot{M} - g\int_z^{H(t)} \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz + g\left(\rho\frac{dH}{dt}\right)_{z=H(t)} = g\dot{M} + g\left[(\rho w) - (\rho w)_{z=H(t)}\right] +$$

$$g\left(\rho\frac{dH}{dt}\right)_{z=H(t)},$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g\rho w + g\dot{M} \tag{4}$$

Применим оператор **rot** к левой и правой частям (2). В результате, аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы Праудмена, получим для «горизонтальных» слагаемых дивергенции скорости;

$$\mathrm{div}_{\mathrm{H}}(\vec{\mathrm{v}}) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = f_{\mathrm{v}} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} u + \frac{\partial \lambda}{\partial y} v\right), \tag{5}$$

$$d\lambda = \frac{\mathrm{d}T}{T}\left(\frac{\mu_{\mathrm{air}}}{\mu_{\mathrm{vap}}} - 1\right)\mathrm{d}\kappa_{\mathrm{v}}\,,$$

$$f_{\mathrm{v}} = \frac{\nu^{\tau}}{2\Omega\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\big(\mathbf{rot}(\boldsymbol{v})\big)_{\mathrm{Z}} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)\right] + \mathrm{ctg}(\varphi)\left[\frac{\partial w}{\partial y} - 0.5w\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] +$$

$$\frac{1}{2\Omega\sin(\varphi)}\left[-\big(\mathbf{rot}(\boldsymbol{a})\big)_{\mathrm{Z}} + \left(a_{\mathrm{y}}\frac{\partial \lambda}{\partial x} - a_{\mathrm{x}}\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\right] \tag{6}$$

(Здесь $\big(\mathbf{rot}(\mathbf{A})\big)_{\mathrm{z}}$ - z - компонента ротора вектора **A**),

где *u, v, w* – соответственно компоненты скорости вдоль $\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}, \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}},$ μ_{air} и μ_{vap} – соответственно молекулярная масса воздуха и воды.

При этом подынтегральное выражение $\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right)$ в (1a) примет вид;

$$\frac{\partial \dot{\mathrm{M}}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) = \rho\big[f_{\mathrm{v}} + f_{\mathrm{p}}\big]\,, \tag{7}$$

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{1}{p}\left(u\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y}\right)\,, \tag{8}$$

где *p* – давление воздуха. Далее оценим величины f_{v} и f_{p}. Для оценки величины f_{v} в правой части (7) обозначим характерные значения; ω_{c} – вертикальной компоненты $\mathbf{rot}(\boldsymbol{v})$для крупно масштабных вихрей,

ν^{τ} – вязкость для вертикальных движений, w_0 – вертикальной скорости , L_z – вертикального масштаба, L_h – горизонтального масштаба, u_h - скорости ветра, $a_h \sim \frac{u_h^2}{L_h}$ – горизонтального ускорения. Тогда масштабы слагаемых в квадратных скобках в правой части f_v соотношения (6) окажутся соответственно порядка $\tau_\Omega^{-1} = \omega_c \mathrm{Ek}$, $\tau_w^{-1} = \frac{w_0}{L_h}$, $\tau_a^{-1} = \Omega\,\mathrm{Ro}^2$,

где $\mathrm{Ro} = \frac{u_h}{2\Omega\sin(\varphi)L_h}$ – число Россби, $\mathrm{Ek} = \frac{\nu^{\tau}}{2\Omega\sin(\varphi)L_z^2}$ – число Экмана.

Для малых горизонтальных масштабов L_h значительными могут быть второе и третье слагаемое, а для больших L_h – второе слагаемое убывает как L_h^{-1}, а третье – как L_h^{-2} . Поэтому для больших L_h и для градиентов функции $\lambda = \lambda(T, \kappa_v)$, соответствующих характерным горизонтальным неоднородностям параметров атмосферы по данным таблиц [7], величину f_v можно представить приближенным соотношением:

$$f_v \approx \frac{1}{\tau_\Omega}\frac{\partial^2 \mathbf{rot}(\boldsymbol{v})_z}{\partial z^2} \qquad (9)$$

Исходя из уравнений (2) для горизонтальных компонент импульса, получим в правой части (8) для f_p

$$f_p = \frac{1}{p}\left((\nabla p)\boldsymbol{v}\right)_h = \frac{\gamma}{C^2}\left[-2\Omega\cos(\varphi)u\,w - (\boldsymbol{av})_h + \nu^{\tau}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right],$$
$$где\ (\boldsymbol{av})_h \equiv (a_x u + a_y v),\ \left((\nabla p)\boldsymbol{v}\right)_h = \frac{\partial p}{\partial x}u + \frac{\partial p}{\partial y}v. \qquad (10)$$

где γ – показатель адиабаты для воздуха, C^2 – квадрат скорости звука.

Для высот, соответствующих «свободной атмосфере», где применимо геострофическое приближение, величину f_p можно считать пренебрежимо малой, поскольку в данном приближении скорость ветра направлена перпендикулярно горизонтальной составляющей градиента атмосферного давления.

Для высот, соответствующих приземному атмосферному слою ($z \le 100$ m), в правой части (10) главным является третье слагаемое. Оценка, проведенная по данным [7], показывает, что для характерных значений скоростей ветра и горизонтальной неоднородности температуры атмосферы, f_{p} существенно меньше соответствующих слагаемых в f_{V} (соотношение (6)), также содержащих производные: $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Таким образом, для больших синоптических характерных масштабов левая часть соотношения L_{h} (7), а следовательно и $\dot{\text{M}}$ в (1д) являются квазистатическими и могут рассматриваться в приближении пренебрежимо малых горизонтальных ускорений. Это утверждение соответствует данным наблюдений, приведённым в монографии Л. Т. Матвеева [8].

На рис.1. представлена построенная по данным [8] зависимость характерного масштаба вертикальной скорости W воздуха от соответствующего горизонтального масштаба ΔX области, над которой наблюдались вертикальные потоки.

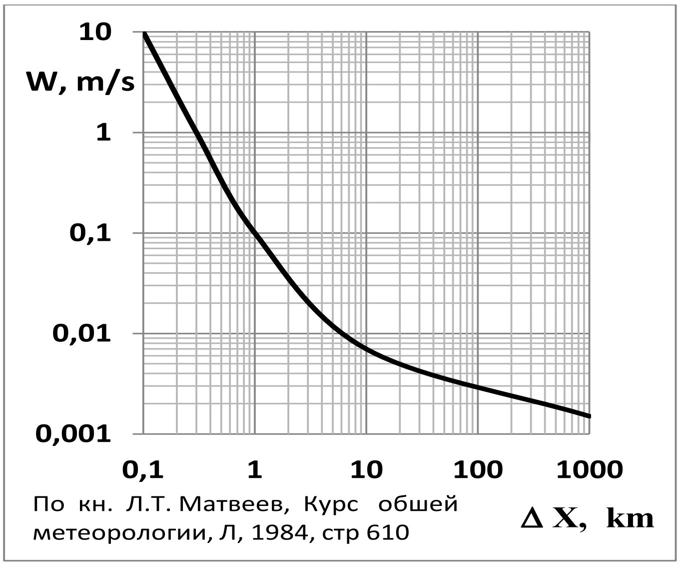

Рис. 1. Зависимость характерного масштаба вертикальной скорости W воздуха от соответствующего горизонтального масштаба $\Delta\tilde{O}$

Как видно из рис.1, для малых горизонтальных масштабов значения W могут превышать метры в секунду.

Это объясняется влиянием инерции горизонтальных ветровых потоков. Большим горизонтальным масштабам соответствуют малые в среднем по площади величины вертикальной скорости W. Далее конкретизируем выражения для $\dot{\mathrm{M}}$, $\frac{\partial \dot{\mathrm{M}}}{\partial z}$. Учитывая только главные слагаемые в правой части (6), получим:

$$\frac{\partial \dot{\mathrm{M}}}{\partial z} = \nu^{\tau}(z)\,\frac{\rho}{2\Omega\sin(\varphi)}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{rot}(\boldsymbol{v})_{\mathrm{z}}}{\partial z^2}\right\} \qquad (11)$$

Поскольку направление $\boldsymbol{n} = \mathbf{e}_1\cos(\psi) + \mathbf{e}_2\sin(\psi)$, (ψ - угол между направлением ветра и широтой) скорости ветра V_{h} (z) в приземном слое можно считать неизменным по высоте, примем: $u = V_{\mathrm{h}}(z)\cos(\psi)$, $\upsilon = V_{\mathrm{h}}(z)\sin(\psi$

Тогда:

$$\frac{\partial \dot{\mathrm{M}}}{\partial \mathrm{z}} \approx \nu^{\tau}(z)\,\frac{\rho}{2\Omega\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial^2 V_{\mathrm{h}}}{\partial z^2}(\nabla\lambda\times\boldsymbol{n})_{\mathrm{z}} + \frac{\partial^2\left(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathrm{z}}}{\partial z^2}\right], \qquad (12)$$

$$\dot{\mathrm{M}} = -\int_{\mathrm{z}}^{\mathrm{H}(t)}\frac{\partial \dot{\mathrm{M}}}{\partial \mathrm{z}}\,\mathrm{d}z.$$

Для конкретизации правой части (12) рассмотрим в приближении модели Монина-Обухова (в соответствии с [9]) соотношения, моделирующие распределение по высотам для коэффициента турбулентного переноса и скорости ветра. Тогда зависимость скорости ветра V_{h} от высоты определяется соотношением;

$$V_{\mathrm{h}}(z) = \frac{\upsilon_*}{k}\ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right),\ \ \eta = \exp\left(\frac{z}{L_*}\right) + \frac{\nu^{\mathrm{m}}}{\upsilon_* L_*} - 1,\ \ \eta_0 = \exp\left(\frac{z_0}{L_*}\right) + \frac{\nu^{\mathrm{m}}}{\upsilon_* L_*} - 1. \qquad (13)$$

где z_0 – параметр шероховатости. ($\mathbf{z_0}$ ~ 0.1 от характерного размера неровности поверхности) , ν^m –молекулярная вязкость воздуха,

$$L_* = -\frac{\upsilon_*^3 c_p \rho}{k\beta q}, \tag{14}$$

$\upsilon_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ – скорость трения (τ_0 – напряжение трения при z=0), k =0.4 –число Кармана, β=g/T – параметр плавучести [11], q – тепловой поток, положительный, если направлен от земной поверхности вверх. Предположим, что $\left(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})\right)_z$ изменяется с высотой так же, как и скорость ветра;

$$\left(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})\right)_z = \frac{\omega_*}{k}\ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right). \tag{15}$$

Если на высоте порядка 1 км $\left(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})\right)_z \approx 4 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ [12] , то $|\omega^*|$~10^{-7} s^{-1}. Для малых значений завихренности $|\omega_*| \ll 10^{-7}$ s^{-1} , главным слагаемым в квадратных скобках правой части (12) становится первое слагаемое, определяемое неоднородностью распределения температуры и влажности в горизонтальном направлении.

После подстановок в (12) соотношений для V_h и ν^τ получим;

$$\frac{\partial\dot{M}}{\partial z} = \nu^t(z)\frac{\rho}{2\Omega\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial^2 V_h}{\partial z^2}(\nabla\lambda\times\boldsymbol{n})_z + \frac{\partial^2\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})_z}{\partial z^2}\right] = \frac{\rho}{2\Omega\sin(\varphi)}\frac{\upsilon_*[\upsilon_*(\nabla\lambda\times\boldsymbol{n})_z + \omega_*]}{L_*}\left(\frac{\nu^m}{\upsilon_* L_*} - 1\right)\frac{1}{\eta(z)} \tag{16}$$

$$\dot{M} = \langle\nu^\tau\rangle\frac{\rho[\upsilon_*(\nabla\lambda\times\boldsymbol{n})_z + \omega_*]}{2\Omega\sin(\varphi)}\left(1 - \frac{\nu^m}{\upsilon_* L_*}\right)\left[\frac{1}{\eta(z)} - \frac{1}{\eta(\mathrm{H}(t))}\right], \tag{17}$$

(где $\langle\nu^\tau\rangle = \nu^\tau(Z_*)$, z_* – значение координаты $\left(z < z_* < \mathrm{H}(t)\right)$, соответствующее теореме о среднем при интегрировании по координате.)

С учетом (7) перепишем уравнение неразрывности в виде;

$$\frac{\partial\rho w}{\partial z} = -\frac{\partial\dot{M}}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Поскольку $\rho=\rho(T,p,\kappa_v)$ и $\frac{\partial\rho}{\partial p}=\frac{\rho}{p},\ \frac{\partial\rho}{\partial T}=-\frac{\rho}{T},\ \frac{\partial\rho}{\partial\kappa_v}\approx\rho\left(\frac{\mu_a}{\mu_v}-1\right),$

получим окончательно;

$$\frac{\partial\rho w}{\partial z}+\frac{\rho w}{L_g}=-\left(\frac{\dot{M}}{L_g}+\frac{\partial\dot{M}}{\partial z}\right)+\rho\left[\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}-\left(\frac{\mu_a}{\mu_v}-1\right)\frac{\partial\kappa_v}{\partial t}\right] \tag{18}$$

Заметим, что в (18) не стационарные слагаемые в правой части обусловлены только процессами теплопередачи и диффузии.

Заключение. Уравнение для вертикальной скорости, предложенное в работе Р.И. Нигматулина [7], можно считать безынерционным по всем пространственным переменным при достаточно больших (синоптических) характерных горизонтальных масштабах моделирования.

Литература

1. *Нигматулин Р.И.* Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы при малых силах инерции по сравнению с силой тяжести // «Прикладная математика и механика», – 2018., т. 82, вып. №4, – 472- 484с.

2. *Монин А. С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, – 1988, – 424с.

3. *Монин А.С.. Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. – М., Наука, – 1963, т.1, – 641с.

4. *Зилитинкевич С.С.* Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои. – М., Физматлит, – 2013, – 252с.

5. *Канцырев Б. Л.* Влияние параметров атмосферного воздуха и поверхностного испарения водяного пара на решение квазистатической системы уравнений метеорологии и переноса излучения // Известия КГТУ, – 2018, № 3(47), – 309-318с.

6. *Рейнольдс О.* Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия. // Проблемы турбулентности. / Под ред. Великанова М.А. и Швейковского Н.Т. – М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, –1936, – 185-227с.

7. Динамическая метеорология. Теоретическая метеорология. / Под ред. Лайхтмана Д.Л. – Л., Гидрометеоиздат, – 1976 , – 607с.

8. *Матвеев Л.Т.* Физика атмосферы. – СПб, Гидрометеоиздат, –2000, –780с.

9. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. – М.: т. 1, –Наука. –1992. –695с.