МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.9

Омуров Т.Д.
доктор физико-математических наук,
профессор
Omurov T.D.
doctor of physics&mathematical sciences,
professor

Алыбаев А.М.
кандидат физико-математических наук,
профессор
Alybaev A.M
candidater of physico-matyhematical sciences,
professor

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Kyrgys National University after name of J.Balasagyn
Ж.Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университети

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА АЛЛЕРА, ГДЕ ВЫРОЖДАЕТСЯ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ОСОБЫМ РЕШЕНИЕМ

ӨЗГӨЧӨ ЧЫГАРЫЛЫШТАГЫ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ВОЛЬТЕРРДИН БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ТЕҢДЕМЕСИ ПАЙДА БОЛУУЧУ АЛЛЕРДИН ТИБИНДЕГИ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛОО

REGULARIZATION OF THE ALLER TYPE INVERSE PROBLEM, WHERE NONLINEAR VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND WITH A SPECIAL SOLUTION IS DEGENERATES

Аннотация. В области задач математической физики исследованы различные классы обратных задач, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных. Среди этих задач важное место занимают задачи, где вырождаются линейные и нелинейные уравнения Вольтерра первого и третьего рода с решениями в классе обобщенных функций, так как их исследования еще не имеют общих методов решения. В некоторых случаях разработаны способы исследований, связанные с методом регуляризации в обобщенном смысле, имеющие сингулярности относительно малого параметра. В связи с этим, в данной статье изучается коэффициентная обратная задача, вырождающая в нелинейное уравнение Вольтерра первого рода с решением в классе обобщенных функций. Во многих прикладных задачах встречаются задачи такого вида, например в задачах влагопереноса в почвогрунтах, геометрической оптики, в задачах описывающего конвективную диффузию солей в пористых средах и др., в чем и заключается актуальность данной работы.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, интегральные уравнения Вольтерра, некорректная обратная задача, метод интегральных операторов, метод регуляризации.*

Аннотация. Математикалык физиканын маселелеринин областында жекече туундулардагы дифференциалдык теңдемелер менен байланышкан ар түрдүү класстагы тескери маселелер изилденген. Ушул маселелердин арасында чыгарылыштары өзгөчөлөнүшкөн функциялардын классындагы Вольтеррдин биринчи жана үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес теңдемелери пайда болуучу маселелер өзгөчө орунду ээлешет, анткени алардын изилдениши азырынча чыгарылыштардын жалпы ыкмаларына ээ эмес. Кээ бир учурларда кичине параметрге салыштырмалуу сингулярдуулукка ээ болуучу өзгөчөлөнгөн мааниде регуляризациялоо методу менен байланышкан изилдөөлөрдүн ыкмалары иштелип чыккан. Ушуга байланыштуу берилген макалада чыгарылышы өзгөчөлөнүшкөн функциялардын классындагы Вольтеррдин сызыктуу эмес биринчи түрдөгү теңдемеси пайда болуучу коэффициенттүү тескери маселеси изилденип жатат. Көптөгөн прикладдык маселелерде ушул сыяктуу маселелер кездешет. Мисалы, кыртыштын нымдуулук алып жүрүүчүлүк маселеси, геометриялык оптика ж.б. Мына ушулар берилген эмгектин актуалдуулугун белгилешет.

Негизги сөздөр: *дифференциялдык теңдемелер, Вольтердин интегралдык теңдемелери, туура эмес коюлган тескери маселе, интегралдык операторлор ыкмасы, регуляризациялоо ыкмасы.*

Abstract. In the field of problems of mathematical physics, various classes of inverse problems associated with partial differential equations have been studied. Among these problems, an important place is occupied by problems where linear and nonlinear Volterra equations of the first and third kind degenerate with solutions in the class of generalized functions, since their studies do not yet have general solution methods. In some cases, research methods have been developed that are related to the regularization method in a generalized sense, having singularities with respect to a small parameter. In this regard, in this article we study the coefficient inverse problem that degenerates into a nonlinear Volterra equation of the first kind with a solution in the class of generalized functions. In many applied problems, there are problems of this type, for example, in problems of moisture transfer in soils, geometric optics, in problems describing the convective diffusion of salts in porous media, etc., which is the relevance of this work.

Keywords: *Differential equations, Volterra integral equations, ill-posed inverse problem, method of integral operators, regularization method.*

1. Введение

В статье изучены вопросы регуляризируемости обратных задач (ОЗ) [2,8,9,…] для дифференциальных уравнений (ДУ) типа Аллера [1,6], где вырождается некорректное нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода (ИУВ-1) [3-5,7,9,11,14] и др. Поэтому, методика исследования основывается на такие апараты иследования, как метод интегральных операторов (МИО) и метод регуляризации (МР) в обобщенном смысле. Разработанный МР для исследуемой задачи анализируется в специальном пространстве обобщенных функций, которое введено в данной работе. Известно, что в некоторых случаях движение жидкости в почве приводит к обобщению диффузной модели влагопереноса [1,6] и др. При этом, когда, в отличие от капиллярного потенциала влажности введется потенциал, состоящий из суммы капиллярного потенциала влажности и добавочного члена (эффективный потенциал [6]): $\psi = \psi_0 + A_0 U_t(x,t)$, где ψ − градиент потенциала влаги, $U-$ распределение влаги, $[0,H]\ni x$ − координата, $[0,T]\ni t$ − время, $0<A_0=const$ (для простоты $A_0=1$). Тогда, учитывая уравнения неразрывности следует уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[D(U)\frac{\partial U}{\partial x}+A\ \frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}], \tag{1}$$

здесь $D(U)$ − коэффициент диффузивности, кроме того, пренебрегается влияние гравитации, потенциал которого $\psi_g=-\rho gx,$ а величина $0<A=const$ (в общем случае A – достаточно гладкая положительная функция). Чтобы определить распределение влаги в почвенном слое $[0,H]$ для всех времен $[0,T]\ni t$ относительно ДУ (1) считается известными (классические начально-граничные условия):

а) глубинный ход влажности в начальный момент:

$$U\big|_{t=0}=\varphi(x),\forall x\in[0,H],$$

б) распределение влаги на поверхности почвы при $x=0$ и $x=H$, т.е.:

$$U_x\big|_{x=0}=\phi_1(t);U\big|_{x=H}=\phi_0(t),\forall t\in[0,T],$$

где допускаются условия согласования вида

$$\phi_0(0)=\varphi(H),\phi_1(0)=\varphi_x(0).$$

Далее, в качестве развитии теории этих задач, во многих работах ученых были изучены случаи, где было заменено условие (б) с условием, связывающим значения искомой функции по ее производной по координате x в фиксированных точках $x_j\in[0,H),(j=1,n),$ (условия нелокального характера), а также рассматривали задачу с различными упрощениями относительно коэффициента диффузивности [1,6,8,13] и др. При этом для ДУ (1), результаты были в основном получены:

1) в пространствах Банаха, когда были исследованы задачи прямого характера, так как, здесь изучаемые задачи редуцируются к ИУ-2 [1,6,13] и др.;

2) при изучении ОЗ, так как в некоторых случаях вырождаются ИУВ-1 или ИУВ-3, то регуляризационные алгоритмы были применены в пространствах Банаха, а случае ИУВ-1 и пространстве Гильберта [7,8] и др.

В нашем случае, рассматривается нелокальная ОЗ с неоднородным ДУ третьего порядка, т.е. вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda D(U)\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}]=\lambda\frac{\partial U}{\partial t}+f(x)(J\theta)(t), \tag{2}$$

$$\begin{cases} U\big|_{t=0}=\varphi(x),\forall x\in[0,H], \\ U_x\big|_{x=0}=\psi_1(t);U\big|_{x=H}=\psi_0(t),\forall t\in[0,T], \\ \psi_0(0)=\varphi(H),\psi_1(0)=\varphi_x(0), \end{cases} \tag{3}$$

$$U_{x^2}(x_0,t)+\sum_{i=1}^{2}\ \lambda_i U_x(x_i,t)=g(t),\forall t\in[0,T],(x_0;x_i\in(0,H),D_0=(0,H)\times(0,T)), \qquad (4)$$

здесь:

$$J\theta\equiv\int_0^t\ K(t,s)\theta^3(s)ds,$$

при этом неизвестным является вектор функция $P=(U,\theta)$.

Отметим, так как относительно функции θ из исходной ОЗ вырождается нелинейное ИУВ-1:

$$\int_0^t\ K(t,s)\theta^3(s)ds=F(t), \qquad (*)$$

где известные функции:

$$\lambda=A^{-1},\lambda_i,(i=1,2);f(x),\varphi(x),\psi_0(t),\psi_1(t),g(t)$$

изучаемой ОЗ допускают условия:

a$_1$) $\lambda,\lambda_i=const,(i=1,2);C[0,X]\ni f(x);C^2(R)\ni\varphi(x);\psi_0(t),\psi_1(t),g(t)\in C^1[0,T]$,

a$_2$) $K\left(t,s\right)\in C\left(D_1\right)\cap Lip(t\left|L_K\right.),0<L_K=const;0\le K\left(t,t\right),K(0,0)\ne 0;\left|K(.)\right|\le C_{01},$

$D_2=\{(t,s):0\le s\le t\le T\},$

a$_3$) $C[0,T]\ni F(t):F(t)\ge\alpha>0,\forall t\in[0,T];\left|F(t)\right|\le C_{02}=const,$

причем, при условии (a$_3$) ИУВ-1 (*) некорректно поставлено в $C[0,T]$. Тогда, в рамках указанных условий, для исследования ОЗ (2)-(4) применяются МИО, МР в обобщенном смысле, так как регуляризируемость ИУ (*) принимается в обобщенном смысле в $Z^3(0,T)$ (здесь, решение ИУВ-1 (*), связана с функцией Дирака).

Известно, что условия (4) является разновидностями условия Бицадзе-Самарского [7,8,13] и др.

1. Интегрилизация ОЗ

Чтобы интегрилизировать исходную ОЗ, удобно применять соотношение, где искомая функция U связывается с векторной функцией $P_0=(Q,\theta)$, на основе равенства вида:

$$U_{x^2}(x,t)=\varphi_{x^2}(x)+\int_0^t[Q(x,s)+f(x)(J\theta)(s)]ds=(A_1[Q,\theta])(x,t), \qquad (5)$$

кроме того, интегрируя дважды по переменной *x* получим:

$$\begin{cases} U_x = \psi_1(t) + \int\limits_0^x \{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau = (A_2[Q,\theta])(x,t), \\ U = \psi_0(t) - \psi_1(t)H - \int\limits_0^H (H-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau + \\ +\psi_1(t)x + \int\limits_0^x (x-\tau)\{\varphi_{\tau^2}(\tau) + \int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau \equiv (A_3[Q,\theta])(x,t), \end{cases} \quad (6)$$

где $Q(x,t)$ - новая неизвестная функция. Предложенное преобразование (5) удобна для вывода уравнение относительно $(J\theta)(t)$ с учетом (4).

В самом деле, допуская условие (4) с учетом (5),(6), следует:

$$g(t) = \varphi_{x^2}(x_0) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \psi_1(t) + \int\limits_0^t [Q(x_0,s) + f(x_0)(J\theta)(s)]ds + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} \{\varphi_{\tau^2}(\tau) + $$

$$+\int\limits_0^t [Q(\tau,s) + f(\tau)(J\theta)(s)]ds\}d\tau$$

или после некоторых математических преобразований имеем:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t (J\theta)(s)ds = \beta_0^{-1}\{g(t) - (\varphi_{x^2}(x_0) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\psi_1(t)) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} \varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau - \int\limits_0^t Q(x_0,s)ds - \\ -\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau\} \equiv (A_4Q)(t), \\ \frac{\partial}{\partial t}(A_4Q)(t) = \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \\ \beta_0 = f(x_0) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} f(\tau)d\tau \neq 0, \\ \tilde{g}(t) \equiv g(t) - (\varphi_{x^2}(x_0) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i\psi_1(t)) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(\varphi_x(x_i) - \varphi_x(0)), (\tilde{g}(t)\big|_{t=0} = 0). \end{cases} \quad (7)$$

Поэтому, подставляя (7) в (6) относительно функции U получим интегральное соотношение вида:

$$\begin{cases} U=\psi_0(t)-\psi_1(t)H+\psi_1(t)x-\int\limits_0^H(H-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau- \\ -\int\limits_0^H(H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsdt+(A_4Q)(t)\times \\ \times\{-\int\limits_0^H(H-\tau)f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)f(\tau)d\tau\}=\Psi(x,t)-\int\limits_0^H(H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+ \\ +\int\limits_0^x(x-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(A_4Q)(t)\{-\int\limits_0^H(H-\tau)f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)\times \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \times f(\tau)d\tau\}\equiv(BQ)(x,t), \\ \Psi(x,t)\equiv\psi_0(t)-\psi_1(t)H+\psi_1(t)x-\int\limits_0^H(H-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)\varphi_{\tau^2}(\tau)d\tau= \\ =\psi_0(t)+\psi_1(t)(x-H)+\varphi_x(0)(H-x)-\varphi(H)+\varphi(x), \\ \Psi(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\forall x\in[0,H],(см.(3.2.2)). \end{cases}$$

Следовательно, учитывая (5),(6) и (8) из ДУ (2) имеем ИУ вида:

$$\begin{gathered} Q(x,t)=\lambda\{\psi_0'(t)+\psi_1'(t)(x-H)-\int\limits_0^H(H-\tau)Q(\tau,t)d\tau+[-\int\limits_0^H(H-\tau)\times \\ \times f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)f(\tau)d\tau]\beta_0^{-1}[g'(t)-\sum_{i=1}^2\lambda_i\psi_1'(t)-Q(x_0,t)- \\ -\sum_{i=1}^2\lambda_i\int\limits_0^{x_i}Q(\tau,t)d\tau]+\int\limits_0^x(x-\tau)Q(\tau,t)d\tau\}-\lambda\{D_\rho[(BQ)(x,t)]\{\psi_1(t)+\varphi_x(x)- \\ -\varphi_x(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(A_4Q)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau\}^2+D[(BQ)(x,t)]\times[\varphi_{x^2}(x)+ \\ +\int\limits_0^t Q(x,s)ds+f(x)(A_4Q)(t)]\}\equiv(\tilde{B}Q)(x,t), \end{gathered} \quad (9)$$

то есть полученное уравнение (9) является ИУ-2 и поэтому, можем допустить следующую лемму.

Лемма 1. В рамках условий (3),(4),(7) и пусть имеют место условия Банаха:

$$\begin{cases} 0<L_{\tilde{B}}<1, \\ \tilde{B}:S_r\to S_r=\{Q:|Q-Q_0|\le r,\forall(x,t)\in\bar{D}_0\}, \\ \|\tilde{B}Q_0-Q_0\|_C\le(1-L_{\tilde{B}})r,(|Q|\le r_0=const,\forall(x,t)\in\bar{D}_0). \end{cases} \quad (10)$$

Тогда ИУ (9) однозначно разрешимо в $Q \in C(\bar{D}_0)$, значит, с учетом (8) единственным образом определяется и функция $U(x,t)$ в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$.

Доказательство. Из первого условия следует, что оператор по правилу (9) является сжимающим, а на основе третьей строки, можем доказать, что введенный оператор по указанному правилу отображает область определения в себя (см. вторую строку) (10). Это значит, что, в самом деле для ИУ (9) реализуются условия принципа Банаха, т.е. уравнение (9) однозначно разрешимо вышеуказанном пространстве Банаха. Поэтому, на основе (8) можем потвердить и выводы относительно функции $U(x,t)$ при этом и частные производные по совокупности аргументов от этой функции вида $U_t, U_x, U_{xt}, U_{x^2}, U_{x^2 t}$ определяются однозначно в виде:

$$\begin{cases} U = (BQ)(x,t), \\ U_t = \psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \\ +[-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau]\beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \\ -\sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \\ U_x = \psi_1(t) + \varphi_x(x) - \varphi_x(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (A_4Q)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{xt} = \psi_1'(t) + \int\limits_0^x Q(\tau,t)d\tau + \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \\ -\sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau]\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{x^2} = \varphi_{x^2}(x) + \int\limits_0^t Q(x,s)ds + f(x)(A_4Q)(t), \\ U_{x^2 t} = Q(x,t) + f(x)\beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i\psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum\limits_{i=1}^2 \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau]. \end{cases} \quad (12)$$

Причем все указанные функции равномерно ограничены для любого $\forall(x,t) \in \bar{D}_0$, так как они связаны с функцией Q (см. (12)). Следовательно, можем допустит условие:

$$\|U\|_{C^{2,1}(\bar{D}_0)} = \|U\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_t\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_x\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{xt}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{x^2}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_{x^2t}\|_{C(\bar{D}_0)} \le M_0.$$ ЧиТД.

Примечание 1. Отметим, так как в банаховых пространствах наряду с понятием сильной сходимости, важную рольиграет понятие слабой сходимости. Поэтому, на основе известной теоремы К. Фридрихса получим, что при выполнении условий леммы 1, так как функция U однозначно определяется по правилу (8) и ограничено в $C^{2,1}(\bar{D}_0)$, то по указанной теореме [12] функция U оценивается и в линейном пространстве $\tilde{W}^3(D_0)$ (обратно нет), так как функция Q, с учетом леммы 1 допускает условие:

$$|Q| \le r_0, \forall (x,t) \in \bar{D}_0. \tag{13}$$

Здесь

$$\tilde{W}^3(D_0) = \{(x,t) \in \bar{D}_0 : U, U_x, U_{x^2} \in C(\bar{D}_0); U_t, U_{tx}, U_{tx^2} \in L^3(D_0)\},$$

то учитывая норму этого пространство имеем оценку вида:

$$\begin{cases} \|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} = \sum_{i=0}^{2} \|U_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|U_t\|_{L^3(D_0)} + \|U_{tx}\|_{L^3(D_0)} + \|U_{tx^2}\|_{L^3(D_0)} \le N_0, (U_{x^0}^{(0)} = U), \\ \|U_t(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_s(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}; \|U_{tx}(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_{s\tau}(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}, \\ \|U_{tx^2}(t,x)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |U_{s\tau^2}(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 : \ p = 3, q = \frac{3}{2}). \end{cases} \tag{14}$$

Если вместо (13) требуем, что функция Q в $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\|Q(x,t)\|_{L^3} = (\int_{D_0} |Q(\tau,s)|^3 d\tau ds)^{\frac{1}{3}} \le N_{01} = const,$$

то, и в этом случае имеют место оценки, которые указаны по формуле (14).

Кроме того, так как решением исходной ОЗ является вектор – функция: $P = (U, \theta)$, то для доказательство регуляризируемости этой задачи рассматривается линейное векторное пространство $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0), Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой:

$$\|P\|_{\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0); Z^3(0,T)]}} = \|U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} + \|\theta\|_{Z^3(0,T)}. \tag{15}$$

Для этого, сперва, должны доказать регуляризируемости некорректного ИУВ-1, которое вырождается из исходной ОЗ.

3. Регуляризируемость ИУВ-1

Из полученных результатов леммы 1 и с учетом формулы (7), следует некорректное ИУВ-1 вида:

$$\begin{cases} J\theta \equiv \int\limits_0^t K(t,s)\theta^3(s)ds = F(t), \\ F(t) \equiv \beta_0^{-1}[g'(t) - \sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_i \psi_1'(t) - Q(x_0,t) - \sum\limits_{i=1}^{2} \lambda_i \int\limits_0^{x_i} Q(\tau,t)d\tau], \end{cases} \tag{16}$$

так как допускаются условия (a_2,a_3). Чтобы доказать регуляризируемости ИУ (16) при условии (a_3) в обобщенном смысле, сперва преобразуем это ИУ к виду:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h(\tau)\theta(\tau)d\tau = (\Phi\theta)(t) + F(t), \\ \Phi\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), \end{cases} \tag{17}$$

так как можем вести, следующие математические преобразования:

$$\begin{cases} h(t) \equiv [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t)]F(t) \ge m > 0, (1 < \gamma = const), \\ h_0(t) \equiv \gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(t); 0 \le \mu(t) \in L^1(0,T), \\ h_0(t) \le a^{-1}h(t); F_0(t) \equiv F(t) - F(0), (F_0(0) = 0), \\ \phi_0(t) = \int\limits_0^t [\gamma + \frac{1}{\alpha}\mu(\tau)]F(\tau)d\tau = \int\limits_0^t h(\tau)d\tau, \\ |F_0(t) - F_0(\tau)| \le L_{F_0} M_0(\phi_0(t) - \phi_0(\tau)), (\tau \le t), \\ \gamma > 1; M_0 = \frac{1}{\gamma\alpha};\ 0 < \max C_{0j} = C_0, (j = 1,2; см.(a_2,a_3)), \\ t \in [0,T]: \\ t = (t^{\frac{2}{9}})^{\frac{9}{2}} \le (\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}, (\lambda(t) = \frac{2}{9\sqrt[9]{t^7}}); t \le M_1(\phi_0(t))^2, (M_1 = \sup\limits_{[0,T]}(\phi_0(t))^{\frac{5}{2}}). \end{cases} \tag{18}$$

Далее, наряду с уравнением (17) введем ИУ с малым параметром вида:

$$\begin{cases} \varepsilon\theta_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau = (\Phi\theta_\varepsilon)(t) + F_\varepsilon(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) \equiv \int\limits_0^t h(\tau)\theta_\varepsilon(\tau)d\tau - (\Phi\theta_\varepsilon)(t), \end{cases} \tag{19}$$

и решение этого ИУ ищем в виде

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(t) + \upsilon(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ \Pi_\varepsilon(0) = F(0), \upsilon(0) = 0, \xi_\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Следовательно, относительно неизвестных функций получим систему вида:

$$\begin{cases} \Pi_\varepsilon(t) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)\Pi_\varepsilon(s)ds + F(0), \\ \int\limits_0^t h(s)\upsilon(s)ds = (\Phi\upsilon)(t) + F_0(t), \\ \varepsilon\xi_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t h(s)\xi_\varepsilon(s)ds = (\Phi[\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon])(t) - (\Phi\upsilon)(t) - \varepsilon\upsilon(t) + F_\varepsilon(t) - F(t), \end{cases} \tag{21}$$

где из ИУ этой системы однозначно определяются все функции, которые содержатся в правой стороне формулы (20). Поэтому, можем доказать следующую лемму.

Лемма 2. При условиях леммы 1 и (a_2, a_3, (18)), относительно ИУ системы (21) имеют место:

1) $\Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)ds)$, с оценкой

$$\left|\Pi_\varepsilon(t)\right| \le C_0 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right); \tag{22}$$

2) решение параметризированного уравнение

$$\delta\upsilon_\delta(t) + \int\limits_0^t h(s)\upsilon_\delta(s)ds = (\Phi\upsilon_\delta)(t) + F_0(t) \tag{23}$$

равномерно сходится к решению второго ИУ системы (21) при $\delta \to 0$, так как это ИУ имеет решение в $C[0,\mathrm{T}]$;

3) функция $\xi_\varepsilon(t)$, как решение третьего ИУ системы (21) однозначно разрешимо в $C[0,\mathrm{T}]$, причем равномерно сходится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. 1) В самом деле, учитывая резольвенту

$$R \equiv -\frac{1}{\varepsilon}h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(\eta)d\eta) \tag{24}$$

из первого ИУ системы (21), получим

$$\Pi_\varepsilon(t) = F(0)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t h(s)ds).$$

Отсюда следует оценка:

$$\left|\Pi_\varepsilon(t)\right| \le \left|F(0)\right|\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right) \le C_0\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)\right),$$

т.е., получено неравенство (22).

2) Во-втором случае, ИУ (23), с учетом (24) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \upsilon_\delta = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{(\Phi\upsilon_\delta)(s)-(\Phi\upsilon_\delta)(t)+F_0(s)-F_0(t)\}ds + \\ +\frac{1}{\delta}(\exp(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds'))\{(\Phi\upsilon_\delta)(t)+F_0(t)\} = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau))\times \\ \times\{\int_0^\tau h_0(\tilde{\tau})\upsilon_\delta(\tilde{\tau})\int_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon_\delta^3(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau} - \int_0^t h_0(\tilde{\tau})\upsilon_\delta(\tilde{\tau})\int_0^{\tilde{\tau}} K(\tilde{\tau},\bar{\tau})\upsilon_\delta^3(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tilde{\tau} - \\ -\int_0^\tau K(\tau,\bar{\tau})\upsilon_\delta^3(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \int_0^t K(t,\bar{\tau})\upsilon_\delta^3(\bar{\tau})d\bar{\tau}\}d\tau + \frac{1}{\delta}\{\int_0^t h_0(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\int_0^\tau K(\tau,\bar{\tau})\times \\ \times\upsilon_\delta^3(\bar{\tau})d\bar{\tau}d\tau - \int_0^t K(t,\tau)\upsilon_\delta^3(\tau)d\tau\}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)) + \Delta_1(F_0,\delta) \equiv (P_1\upsilon_\delta)(x), \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \Delta_1(F_0,\delta) \equiv -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{F_0(s)-F_0(t)\}ds + \\ +\frac{1}{\delta}F_0(t)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds). \end{cases}$$

Далее, так как допускаются условия

$$\begin{cases} |\Delta_1(F_0,\delta)| \le | \frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))L_{F_0}(t-s)ds + \\ +L_{F_0}\frac{t}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \frac{1}{\alpha\gamma}L_{F_0}\int_0^t \exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s)))\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))\times \\ \times d(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t)-\phi_0(s))) + L_{F_0}M_1\delta(\frac{1}{\delta}\phi_0(t))^2\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t)) \le \\ \le L_{F_0}[\frac{1}{\alpha\gamma}+2^2e^{-2}M_1\delta] \le L_0, \\ \int_0^\infty e^{-z}zdz = 1; \rho \equiv \frac{1}{\delta}\phi_0(t); \chi(\rho) \equiv \rho^k\exp(-\rho); \sup_{\rho\ge 0}\chi(\rho) = k^k\exp(-k), \\ \rho = 0: \chi(0) = 0; \rho\to\infty: \chi\to 0, (k=1,2) \end{cases} \tag{26}$$

и

$$\begin{cases} 0 < L_{P_1} = C_0[6r_1^2M_0 + \frac{1}{\alpha}8r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T < 1, \\ P_1 : S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0) = \left\{\upsilon_\delta(t) \in C[0,T] : \left|\upsilon_\delta(t)\right| \le r_1, \forall t \in [0,T]\right\}, \\ | \ \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t))\{\int_0^t h_0(\tau)\upsilon_\delta(\tau)\int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)\,d\bar\tau\,d\tau - \\ -\int_0^t K(t,\tau)\upsilon_\delta^3(\tau)\,d\tau\} \ | \le C_0e^{-1}[3r_1^2M_0 + \frac{1}{\alpha}4r_1^3T]\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C, (e^{-1} < 1), \\ |-\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(\tau)\exp(-\frac{1}{\delta}(\phi_0(t) - \phi_0(\tau))\{\int_0^\tau h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)\,d\bar\tau\,d\tilde\tau - \\ -\int_0^t h_0(\tilde\tau)\upsilon_\delta(\tilde\tau)\int_0^{\tilde\tau} K(\tilde\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)\,d\bar\tau\,d\tilde\tau - \int_0^\tau K(\tau,\bar\tau)\upsilon_\delta^3(\bar\tau)\,d\bar\tau + \int_0^t K(t,\bar\tau)\times \\ \times\upsilon_\delta^3(\bar\tau)\,d\bar\tau\}d\tau \ | \le \{C_0[3r_1^2M_0 + \frac{1}{\alpha}4r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T\}\int_0^\infty e^{-z}zdz\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C = \\ = \{C_0[3r_1^2M_0 + \frac{1}{\alpha}4r_1^3T] + 3r_1^2L_KM_0T\}\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C, \end{cases} \tag{27}$$

то из (25) получим оценку вида

$$\left\|\upsilon_\delta(t)\right\|_C \le \left(1 - L_{P_1}\right)^{-1}\left\|\Delta_1(F_0,\delta)\right\|_C \le \left(1 - L_{P_1}\right)^{-1}L_0 = r_1, \tag{28}$$

где L_{P_1} – это коэффициент Липшица оепратора P_1, и при выполнении условия (27) относительно ИУ (25) выполняются условия Банаха, а это означает, что ИУ (25) однозначно разрешимо в C[0,T].

Далее, с помощью подстановки

$$\upsilon_\delta(t) = \upsilon(t) + \eta_\delta(t) \tag{29}$$

и резольвенты (24) относительно функции $\eta_\delta(t)$ получим ИУ вида

$$\begin{cases} \eta_\delta = -\frac{1}{\delta^2}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{-\int_0^s K(s,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + \\ +(\eta_\delta(s'))^3]ds' + \int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + (\eta_\delta(s'))^3]ds' + \\ +\int_0^s h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int_0^s h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + \\ +3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds' - \int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' - \\ -\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + 3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}ds + \\ +\frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t))\{-\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + (\eta_\delta(s'))^3]ds' + \\ +\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})\times \\ \times[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + 3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\} + \Delta(\upsilon,\delta) \equiv (P_2\eta_\delta)(t), \\ \Delta(\upsilon,\delta) \equiv -\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')(-\upsilon(s) + \upsilon(t))ds - \upsilon(t)\exp(-\frac{1}{\delta}\int_0^t h(s')ds), \\ \eta_\delta(t) \in S_{\tilde{r}_1}(0) = \{\eta_\delta(t) : |\eta_\delta(t)| \le \tilde{r}_1, \forall t \in [0,T]\}. \end{cases} \tag{30}$$

Пусть:

$$\|\Delta(\upsilon,\delta)\|_C \le 3\|\upsilon(t)\|_C \exp\left(-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) + \omega_\upsilon(\delta^\beta), (0 < \beta < 1), \tag{31}$$

где

$\omega_\upsilon(\delta^\beta) = \sup\left\{\left|\upsilon\left(\phi_0^{-1}(t)\right) - \upsilon\left(\phi_0^{-1}(z)\right)\right|; |t-z| \le \delta^\beta\right\}$ - модуль непрерывности,

$\phi_0^{-1}(t)$ - обратная к функции $\phi_0(t) = \int_0^t h(s)ds$ и при этом имеет место

$$\begin{cases} a_4) \left| \frac{1}{\delta}\exp(-\frac{1}{\delta}\phi_0(t))\{-\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + (\eta_\delta(s'))^3]ds' + \right. \\ +\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})\times \\ \left.\times[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + 3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}\right| \le \{C_0 e^{-1}[(r_1 + \tilde{r}_1)^2 + r_1^2 + \\ +r_1(r_1 + \tilde{r}_1)](M_0 + \frac{1}{\alpha}r_1 T) + \frac{1}{\alpha}C_0 T(r_1 + \tilde{r}_1)^3\}\|\eta_\delta\|_C \le d_1\|\eta_\delta\|_C, (e^{-1} < 1), \end{cases}$$

и аналогично допускается неравенство

$$\begin{cases} a_5) \Big| -\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\delta}\int_s^t h(s')ds')\{-\int_0^s K(s,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + \\ +(\eta_\delta(s'))^3]ds' + \displaystyle\int_0^t K(t,s')[3(\upsilon(s'))^2\eta_\delta(s') + 3\upsilon(s')(\eta_\delta(s'))^2 + (\eta_\delta(s'))^3]ds' + \\ +\displaystyle\int_0^s h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' + \int_0^s h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + \\ +3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds' - \displaystyle\int_0^t h_0(s')\eta_\delta(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s}) + \eta_\delta(\bar{s}))^3 d\bar{s}ds' - \\ -\displaystyle\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'} K(s',\bar{s})[3(\upsilon(\bar{s}))^2\eta_\delta(\bar{s}) + 3\upsilon(\bar{s})(\eta_\delta(\bar{s}))^2 + (\eta_\delta(\bar{s}))^3]d\bar{s}ds'\}ds \ \Big| \le d_2\|\eta_\delta\|_C. \end{cases}$$

Тогда оценивая (30), получим

$$\begin{cases} \|\eta_\delta(t)\|_C \le \left(1 - L_{P_2}\right)^{-1}[3\|\upsilon(t)\|_C \exp\left(-\dfrac{1}{\delta^{1-\beta}}\right) + \omega_{\bar{\upsilon}}\left(\delta^\beta\right)] \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0, \\ L_{P_2} = d_1 + d_2 < 1, \end{cases} \tag{32}$$

кроме того, функция η_δ единственным образом определяется в $C[0,T]$. Поэтому, на основе (29) при $\delta \to 0$, следует

$$\upsilon_\delta(t) \to \upsilon(t), \forall t \in [0,T], \tag{33}$$

Это значит, что следует второе утверждение леммы 2.

3) Функцию $\xi_\varepsilon(t)$, так как определяется из третьего ИУ системы (21), то, с учетом резольвенты (24) частично обращая это ИУ, получим:

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t h(s)\exp(-\dfrac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds')\{-\int_0^s K(s,s')[\dfrac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3 + (\xi_\varepsilon(s'))^3 + \\ +3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s') + 3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2 + 3(\upsilon(s'))^2\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s') + 3\dfrac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + \\ +3\dfrac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s') + 3\dfrac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2 + 6\dfrac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds' + \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&+\int_0^t K(t,s')[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3+(\xi_\varepsilon(s'))^3+3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s')+3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2+\\
&+3(\upsilon(s'))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s')+3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2+3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s')+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2+\\
&+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds'+\int_s^t h_0(s')(\eta_\delta(s')+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s'))\int_0^{s'}K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s})+\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3d\bar{s}ds'+\int_s^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3+(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^3+3(\upsilon(\bar{s}))^2\xi_\varepsilon(\bar{s})+\\
&+3\upsilon(\bar{s})(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2+3(\upsilon(\bar{s}))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s})+3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2+3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2\Pi_\varepsilon(\bar{s})+\\
&+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(\bar{s})\xi_\varepsilon(\bar{s})\Pi_\varepsilon(\bar{s})]d\bar{s}ds'\}ds+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\times\\
&\times\{-\int_0^t K(t,s')[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(s'))^3+(\xi_\varepsilon(s'))^3+3(\upsilon(s'))^2\xi_\varepsilon(s')+3\upsilon(s')(\xi_\varepsilon(s'))^2+\\
&+3(\upsilon(s'))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s')+3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2+3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(s'))^2\Pi_\varepsilon(s')+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(s')(\Pi_\varepsilon(s'))^2+\\
&+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(s')\xi_\varepsilon(s')\Pi_\varepsilon(s')]ds'+\int_0^t h_0(s')(\eta_\delta(s')+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(s'))\int_0^{s'}K(s',\bar{s})(\upsilon(\bar{s})+\eta_\delta(\bar{s})+\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3d\bar{s}ds'+\int_0^t h_0(s')\upsilon(s')\int_0^{s'}K(s',\bar{s})[\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^3+(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^3+3(\upsilon(\bar{s}))^2\xi_\varepsilon(\bar{s})+\\
&+3\upsilon(\bar{s})(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2+3(\upsilon(\bar{s}))^2\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar{s})+3\frac{1}{\varepsilon^2}\upsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2+3\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\varepsilon(\bar{s}))^2\Pi_\varepsilon(\bar{s})+\\
&+3\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_\varepsilon(\bar{s})(\Pi_\varepsilon(\bar{s}))^2+6\frac{1}{\varepsilon}\upsilon(\bar{s})\xi_\varepsilon(\bar{s})\Pi_\varepsilon(\bar{s})]d\bar{s}ds'\}+\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)+\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\equiv(P_3\xi_\varepsilon)(t),
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

где

$$\left\{\begin{aligned}
&\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds')(-\upsilon(s)+\upsilon(t))ds-\upsilon(t)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)),\\
&\xi_\varepsilon(t)\in S_{\tilde{r}_2}(0)=\{\xi_\varepsilon(t):|\xi_\varepsilon(t)|\le\tilde{r}_2,\forall t\in[0,T]\}.\\
&\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(s)(\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t h(s')ds'))(F_\varepsilon(s)-F(s))ds+\frac{1}{\varepsilon}(F_\varepsilon(t)-F(t)),\\
&\|\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\|_C\le3\|\upsilon(t)\|_C\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)+\omega_{\upsilon}\left(\varepsilon^\beta\right),(0<\beta<1),\\
&|F_\varepsilon(t)-F(t)|\le\Delta_0(\varepsilon),\forall t\in[0,T],(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0),\\
&|\Delta_2(F_\varepsilon,F,\varepsilon)|\le\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h(\tau)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi_0(t)-\phi_0(\tau))\Delta_0(\varepsilon)d\tau+\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\le\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon).
\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Проведя оценку относительно ИУ (34), получим

$$\begin{cases} \left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C \le \left(1-L_{P_3}\right)^{-1}\left[\frac{2}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)+\left\|\Delta_*(\upsilon,\varepsilon)\right\|_C\right]=\Delta_3(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0,(\frac{1}{\varepsilon}\Delta_0(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0), \\ 0<L_{P_3}<1, \\ P_3:S_{\tilde r_2}(0)\to S_{\tilde r_2}(0). \end{cases} \tag{36}$$

Здесь, при получении оценки (36) учтены следующие факты относительно членов, где содержится функция $\xi_\varepsilon(t)$, например:

$$\begin{cases} 1)\left| -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds')[\int\limits_s^t h_0(\bar s)\xi_\varepsilon(\bar s)\int\limits_0^{\bar s} K(\bar s,\tilde s)\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\tilde s))^3 d\tilde s d\bar s]ds \right| \le \\ \le \frac{1}{\alpha}C_0^4(\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz)\int\limits_0^t \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))d\tilde s\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \frac{1}{\alpha}C_0^4\frac{1}{\varepsilon^3}[t\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(t))+ \\ +\int\limits_0^t \tilde s\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \frac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon^3}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\int\limits_0^\infty \rho^{\frac{9}{2}}e^{-\rho}d\rho]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C = \\ =\frac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon^3}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\frac{945}{32}\sqrt{\pi}]\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C=\gamma_0\sqrt{\varepsilon^3}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C, \\ 2)\left| \frac{1}{\varepsilon^3}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\int\limits_0^t K(t,s)(\Pi_\varepsilon(s))^2\xi_\varepsilon(s)ds \right| \le C_0^3\frac{1}{\varepsilon^3}t\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le \\ \le C_0^3\sqrt{\varepsilon^3}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))^{\frac{9}{2}}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C \le C_0^3\sqrt{\varepsilon^3}(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C=\gamma_1\sqrt{\varepsilon^3}\left\|\xi_\varepsilon\right\|_C, \\ \gamma_0=\frac{1}{\alpha}C_0^4 3^{-\frac{9}{2}}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\frac{945}{32}\sqrt{\pi}];\gamma_1=C_0^3(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}};\ \int\limits_0^\infty e^{-z}zdz=1, \\ \rho\equiv\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t);\chi(\rho)\equiv\rho^k\exp(-\rho);\sup\limits_{\rho\ge 0}\chi(\rho)=k^k\exp(-k), \\ \rho=0:\chi(0)=0;\rho\to\infty:\chi\to 0,(k=1,...,\frac{9}{2}). \end{cases} \tag{37}$$

Аналогичные оценки получим и относительно остальных членов, где содержится функция $\xi_\varepsilon(t)$. Причем, такие же оценки можно указать и относительно членов, которые не содержат функцию $\xi_\varepsilon(t)$, например:

$$\begin{cases} 3)\left| -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t h(s)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t h(s')ds')[\int\limits_s^t h_0(\bar s)\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon(\bar s)\int\limits_0^{\bar s} K(\bar s,\tilde s)\frac{1}{\varepsilon^3}(\Pi_\varepsilon(\tilde s))^3 d\tilde s d\bar s]ds \right| \le \\ \le \frac{1}{\alpha}C_0^5(\int\limits_0^\infty e^{-z}zdz)\int\limits_0^t \frac{1}{\varepsilon^4}\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))d\tilde s \le \frac{1}{\alpha}C_0^5\frac{1}{\varepsilon^4}[t\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(t))+ \\ +\int\limits_0^t \tilde s\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tilde s))] \le \frac{1}{\alpha}C_0^5 3^{-\frac{9}{2}}\sqrt{\varepsilon}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\int\limits_0^\infty \rho^{\frac{9}{2}}e^{-\rho}d\rho]= \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \frac{1}{\alpha} C_0^5 3^{-\frac{9}{2}} \sqrt{\varepsilon}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}] = \gamma_2 \sqrt{\varepsilon}, (\gamma_2 = \frac{1}{\alpha} C_0^5 3^{-\frac{9}{2}}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}]), \\ 4) | \frac{1}{\varepsilon^4}\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)) \int_0^t K(t,s)(\Pi_\varepsilon(s))^3 ds \ | \le C_0^4 \sqrt{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t))^{\frac{9}{2}} \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)) \le \\ \le C_0^4 \sqrt{\varepsilon}(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{9}{2}} = \gamma_3\sqrt{\varepsilon}, (\gamma_3 = C_0^4 (\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{9}{2}}). \end{cases}$$

И т.д. Значит, действительно (36) следует из оценки (34), кроме того из (36) видно, что относительно ИУ (34) реализуются условия Банаха. Следовательно (34) однозначно разрешимо в $C[0,T]$, причем функция $\xi_\varepsilon(t)$ на основе (36) равномерно сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$ для любого $t \in [0,T]$. Лемма 2 доказана.

Выводы:

А) В условиях леммы 2 решение ИУ (19) сходится к решению второго уравнение системы (21), когда $\varepsilon \to 0$ для $\forall t \in (0,T]$,слабо, т.е.:

$$|\theta_\varepsilon - \upsilon| \le \Delta_3(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} C_0 \exp(-\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(t)), \tag{38}$$

Б) Кроме того имеет место:

$$t = 0, \theta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} F(0).$$

С другой стороны, приведенные результаты вышеуказанных пунктов не является полноценным ответом регуляризируемости ИУВ-1, поэтому доказывается следующаяя теорема, которая дает регуляризируемости в обобщенном смысле в $Z^3(0,T)$.

Теорема 1. При условиях леммы 2 и (38) следуют:

$$1) \|\Pi_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)} \le \gamma_4 \varepsilon^{\frac{9}{6}}, (\gamma_4 = C_0 3^{-\frac{9}{6}}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}} e^{-\frac{9}{2}} + \frac{945}{32}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{3}}), \tag{39}$$

$$2) \begin{cases} \| \theta_\varepsilon - \upsilon \|_{Z^3(0,T)} \le \tilde{M}_0(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon) = 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt[3]{T} + \gamma_4 \varepsilon^{\frac{1}{2}}]), \\ \| \theta_\varepsilon \|_{Z^3(0,T)} \le r_* = const, \end{cases} \tag{40}$$

$$3) \ \|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t) - F(t)\|_{Z^3(0,T)} \le \tilde{M}(\varepsilon), (\tilde{M}_0(\varepsilon), \tilde{M}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0). \tag{41}$$

Доказательство. Если рассмотрим неравенство (22) леммы 2 в смысле нормы пространства $Z^3(0,T)$, то получим оценку вида:

$$\| \Pi_\varepsilon \|_{Z^3} \le C_0 (\int_0^t \exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d\tau)^{\frac{1}{3}} = C_0[\tau \exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))\Big|_0^t +$$

$$+ \int_0^t \tau \exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau)) d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]^{\frac{1}{3}} = C_0[t\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(t)) + \int_0^t 3^{-\frac{9}{2}} \varepsilon^{\frac{9}{2}} (\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))^{\frac{9}{2}} \times$$

$$\times\exp(-\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))d(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(\tau))]^{\frac{1}{3}}\le C_0 3^{-\frac{9}{6}}\varepsilon^{\frac{9}{6}}[(\frac{3}{\varepsilon}\phi_0(x))^{\frac{9}{2}}\exp(-\frac{2}{\varepsilon}\phi_0(x))+\int\limits_0^{\infty}e^{-\rho}\rho^{\frac{9}{2}}d\rho]^{\frac{1}{3}}\le$$

$$\le C_0 3^{-\frac{9}{6}}\varepsilon^{\frac{9}{6}}[(\frac{9}{2})^{\frac{9}{2}}e^{-\frac{9}{2}}+\frac{945}{32}\sqrt{\pi}]^{\frac{1}{3}}=\gamma_4\varepsilon^{\frac{9}{6}}.$$

т.е., действительно имеет место (39).

С другой стороны из неравенства (38), на основе (39) и нормы $Z^3(0,T)$ следует

$$\|\theta_\varepsilon-\upsilon\|_{Z^3}\le 2[\Delta_3(\varepsilon)\sqrt[3]{T}+\gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}]=\tilde{M}_0(\varepsilon),$$

кроме того

$$\|\theta_\varepsilon\|_{Z^3(0,T)}\le 4[\sqrt[3]{T}(r+\Delta_3(\varepsilon))+\gamma_4\varepsilon^{\frac{1}{2}}]\le r_*,(|\upsilon|\le r,\forall t\in[0,T]).$$

Это значит, что и выполняется неравенсто (40).

С другой стороны, как отмечены в работах [4,5,7] и др., что при исследовании некорректных нелинейных ИУВ-1 с решением, связанное с функцией Дирака, нельзя естественно определить никакую нелинейную функцию в пространстве ОФ. А это означает, что решение регуляризованного ИУ может слабо сходится к некоторой функции, но эту функцию нельзя рассматривать как решение исходного ИУВ-1, так как в прямом смысле не можем потвердить близости функций $\theta_\varepsilon(x),\theta(x)$ ни в каком смысле. Поэтому, введется понятие регуляризируемости в обобщенном смысле введенном обобщенном пространстве $Z^3(0,T)$.

Значит, чтобы доказать (41), сперва, учитываем оценку вида:

$$|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)|=|\varepsilon\theta_\varepsilon+(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F_\varepsilon(t)-\varepsilon(\theta_\varepsilon-\upsilon+\upsilon)+F_\varepsilon(t)-F(t)|, \qquad (42)$$

где оператор $(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)$ определяется в виде (19). Далее, из (42) переходя по норме $Z^3(0,T)$ получим

$$\|(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t)\|_{Z^3(0,T)}\le 4[\|F_\varepsilon(t)-F(t)\|_{Z^3}+\varepsilon\|\theta_\varepsilon(t)-\upsilon(t)\|_{Z^3}+\varepsilon r\sqrt[3]{T}]\le$$

$$\le 4[\Delta_0(\varepsilon)\sqrt[3]{T}+\varepsilon\tilde{M}_0(\varepsilon)+\varepsilon r\sqrt[3]{T}]=\tilde{M}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0.$$

ЧиТД.

4. Общий вывод регуляризации ОЗ в $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0),Z^3(0,T)]}(D_0)$ с нормой (15)

Из полученных результатов леммы 1 и теоремы 1, на основе (7), (8), в итоге следует:

$$\begin{cases} U=\psi_0(t)+\psi_1(t)(x-H)+\varphi_x(0)(H-x)-\varphi(H)+\varphi(x)- \\ -\int\limits_0^H(H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau+(\int\limits_0^t(J\theta)(s)ds)\times \end{cases} \qquad (43)$$

$$
\begin{cases}
\times\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\
U_t = \psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \\
+(J\theta)(t)\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\
U_x = \psi_1(t) - \varphi_x(0) + \varphi_x(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (\int\limits_0^t (J\theta)(s)ds)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\
U_{x^2} = \varphi_{x^2}(x) + \int\limits_0^t Q(x,s)ds + f(x)\int\limits_0^t (J\theta)(s)ds, \\
U_{tx} = \psi_1'(t) + \int\limits_0^x Q(\tau,t)d\tau + (J\theta)(t)\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\
U_{tx^2} = Q(x,t) + f(x)(J\theta)(t),
\end{cases}
$$

или преобразуя (43) на основе (17) с условиями (18) имеем:

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds - (\Phi\theta)(t) \overset{(17)}{\equiv} (J\theta)(t) = F(t), \\
\Phi\theta \equiv \int\limits_0^t h_0(\tau)\theta(\tau)(J\theta)(\tau)d\tau - (J\theta)(t), [\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds \overset{(17)}{\equiv} \int\limits_0^t h_0(s)\theta(s)(J\theta)(s)ds], \\
U = \psi_0(t) + \psi_1(t)(x-H) + \varphi_x(0)(H-x) - \varphi(H) + \varphi(x) - \int\limits_0^H (H-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + \\
+\int\limits_0^x (x-\tau)\int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (\int\limits_0^t [\int\limits_0^s h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(s)]ds)\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \\
+\int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\
U_t = \psi_0'(t) + \psi_1'(t)(x-H) - \int\limits_0^H (H-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)Q(\tau,t)d\tau + \\
+[\int\limits_0^t h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(t)]\{-\int\limits_0^H (H-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^x (x-\tau)f(\tau)d\tau\}, \\
U_x = \psi_1(t) - \varphi_x(0) + \varphi_x(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t Q(\tau,s)dsd\tau + (\int\limits_0^t [\int\limits_0^s h(s')\theta(s')ds' - (\Phi\theta)(s)]ds) \times \\
\times\int\limits_0^x f(\tau)d\tau,
\end{cases}
\qquad (43)^*
$$

$$\begin{cases} U_{x^2}=\varphi_{x^2}(x)+\int\limits_0^t Q(x,s)ds+f(x)(\int\limits_0^t[\int\limits_0^s h(s')\theta(s')ds'-(\Phi\theta)(s)]ds), \\ U_{tx}=\psi_1'(t)+\int\limits_0^x Q(\tau,t)d\tau+[\int\limits_0^t h(s')\theta(s')ds'-(\Phi\theta)(t)]\int\limits_0^x f(\tau)d\tau, \\ U_{tx^2}=Q(x,t)+f(x)[\int\limits_0^t h(s')\theta(s')ds'-(\Phi\theta)(t)], \end{cases}$$

при этом надо провести оценки выражений:

$$U-U_\varepsilon; U_t-U_{t\varepsilon}; U_{tx}-U_{tx\varepsilon}; U_x-U_{x\varepsilon}; U_{x^2}-U_{x^2\varepsilon}; U_{tx^2}-U_{tx^2\varepsilon}.$$

Причем среди этих оценок, есть некоторые выражения, т.е.:

$$U_t-U_{t\varepsilon}; U_{tx}-U_{tx\varepsilon}; U_{tx^2}-U_{tx^2\varepsilon},$$

которые связанны с разностью:

$$\begin{cases} (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)-F(t), \\ (\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)\overset{(19)}{\equiv}\int\limits_0^t h(s)\theta_\varepsilon(s)ds-(\Phi\theta_\varepsilon)(t), \\ F(t)\overset{(17)}{=}\int\limits_0^t h(s)\theta(s)ds-(\Phi\theta)(t). \end{cases} \tag{44}$$

А в остальных случаях:

$$U-U_\varepsilon; U_x-U_{x\varepsilon}; U_{x^2}-U_{x^2\varepsilon},$$

разность (44) находится под знаком интеграла по переменной *t*.

Поэтому для наглядности сказанного, сперва рассмотрим разность:

$$\begin{cases} U_t-U_{t\varepsilon}=-\int\limits_0^H(H-\tau)[Q(\tau,t)-Q_\varepsilon(\tau,t)]d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)[Q(\tau,t)-Q_\varepsilon(\tau,t)]d\tau+ \\ +[F(t)-(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)]f_0(x), \\ f_0(x)\equiv-\int\limits_0^H(H-\tau)f(\tau)d\tau+\int\limits_0^x(x-\tau)f(\tau)d\tau, \\ |f_0(x)|\le\gamma_2H^2=\gamma_3, \forall x\in[0,H], \end{cases} \tag{45}$$

где содержится (44) и чтобы оценить (45), учитываем результаты леммы 1, т.е., относительно функции Q допускаем условие:

$$|Q-Q_\varepsilon|\le\tilde{\Delta}(\varepsilon), \forall(x,t)\in\bar{D}_0. \tag{46}$$

Тогда, на основе (46) из (45) следует:

$$|U_t-U_{t\varepsilon}|\le H^2\tilde{\Delta}(\varepsilon)+\gamma_3|F(t)-(\Phi_0\theta_\varepsilon)(t)|,$$

или

$$\|U_t - U_{t\varepsilon}\|_{L^3(D_0)} \le 2[H^2\sqrt[3]{TH}\tilde{\Delta}(\varepsilon) + \gamma_3\sqrt[3]{H}(\int_0^T |F(s) - (\Phi_0\theta_\varepsilon)(s)|^3 ds)^{\frac{1}{3}} \le$$
$$\le [см.(3.2.41)] \le 2[H^2\sqrt[3]{TH}\tilde{\Delta}(\varepsilon) + \gamma_3\sqrt[3]{H}\tilde{M}(\varepsilon)] = \Upsilon_{01}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (47)$$

Аналогичным образом доказываются выражения:

$$U_{tx} - U_{tx\varepsilon}; U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon}$$

в пространстве $L^3(D_0)$, т.е.:

$$\|U_{tx} - U_{tx\varepsilon}\|_{L^3(D_0)} \le \Upsilon_{02}(\varepsilon),$$
$$\|U_{tx^2} - U_{tx^2\varepsilon}\|_{L^3(D_0)} \le \Upsilon_{03}(\varepsilon), (\Upsilon_{02}, \Upsilon_{03} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0).$$

(48)

Далее, из выражений :

$$U - U_\varepsilon; U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon},$$

также для простоты оценок рассмотрим, например:

$$|U - U_\varepsilon| = | \ -\int_0^H (H-\tau)\int_0^t [Q(\tau,s) - Q_\varepsilon(\tau,s)]dsd\tau + \int_0^x (x-\tau)\int_0^t \ [Q(\tau,s) - Q_\varepsilon(\tau,s)]dsd\tau +$$
$$+(\int_0^t \ [F(s) - (\Phi_0\theta)(s)]ds) f_0(x) \ \ | \le \tilde{\Delta}(\varepsilon)TH^2 + \gamma_3\tilde{M}(\varepsilon)\sqrt[3]{T^2} = N_{01}(\varepsilon), \forall t \in [0,T]$$

или

$$\|U - U_\varepsilon\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{01}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (49)$$

А другие случаи: $U_x - U_{x\varepsilon}; U_{x^2} - U_{x^2\varepsilon}$ оцениваются аналогично, как в случае (49), так как в этих выражениях разность (44), действительно находится под знаком интеграла. Поэтому, можем допускать:

$$\begin{cases} \|U_{x\varepsilon} - U_x\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{02}(\varepsilon), \\ \|U_{x^2\varepsilon} - U_{x^2}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_{03}(\varepsilon). \end{cases} \qquad (50)$$

Следовательно, учитывая (3.2.47), (3.2.48), (3.2.49), (3.2.50) получим оценку в смысле $\tilde{W}^3(D_0) = \{(x,t) \in \bar{D}_0 : U, U_x, U_{x^2} \in C(\bar{D}_0); U_t, U_{tx}, U_{tx^2} \in L^3(D_0)\}$, т.е.:

$$\|U_\varepsilon - U\|_{\tilde{W}^3(D_0)} \le \sum_{i=1}^3 \ (N_{0i}(\varepsilon) + Y_{0i}(\varepsilon)) = \bar{\Delta}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \qquad (51)$$

Значит, имеет место утверждение следующего вида.

Утверждение 1. В условиях леммы 1 и теоремы 1 и (51) ОЗ (1)-(3) регуляризируема в $\tilde{G}^3_{[\tilde{W}^3(D_0); Z^3(0,T)]}(D_0)$ в обобщенном смысле.

5. Заключение

В статье рассмотрена ОЗ гиперболического типа в $\tilde{G}^{3}_{[\tilde{W}^{3}(D_0);Z^{3}(0,T)]}(D_0)$, вырождающаяся в некорректное ИУВ-1. Исходная задача исследована с помощью МИО и МР, которые позволили выявить достаточные условия однозначной разрешимости этих задач и регуляризируемости в указанном пространстве в обобщенном смысле.

Результаты работы могут быть использованы и в других задачах математической физики, где вырождаются многомерные нелинейные некорректные ИУВ-1.

Литература

1. *Аллэр М.* Эффективный потенциал воды при высыхании почв / Термодинамика почвенной влаги. –Л.6 Гидрометеоиздат, –1966. – С.325-360.
2. *Бухгейм А.Л.* Уравнение Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
3. *Дмитриев В.И.* Обратные задачи электромагнитных методов геофизики //Некорректные задачи естествознания. – М.: Изд. МГУ, 1987. - С. 54-76.
4. *Иманалиев М.И.* Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: Илим, 1981.-144с.
5. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.-92с.
6. *Нерпин С.В., Юзефович Г.И., Янгербер В.А.* О расчете нестационарного движения влаги в почве//Докл. ВАСХНИЛ.-1966.-№6. –С. 2-4.
7. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода.-Бишкек: Илим, 2003.-162с.
8. *Омуров Т.Д.. Каракеев Т.Т.* Регеляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. – Б.: Илим, 2006. – 164 с.
9. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264с.
10. *Сергеев В.О.* Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода// ДАН СССР, 1971.-Т.197, №3, -С.531-534.
11. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. –М.:Наука, 1986. – 287с.
12. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: – Наука, – 1980. – 496 с.
13. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах//Дифференц. уравнения. – 1982. –Т.18, №4.– С.689-699.
14. *T.D. Omurov and A.M. Alybaev.* Regularization of a system of the first kind volterra incorrect two-dimensional equations// Advances in Differential Equations and Control Processes. Vol. 27, (2022), – 149-162.
15. http://www.pphmj.com http://dx.doi.org/10.17654/0974324322018