УДК 517.968

Ашірбаева Айжаркын Жоробековна,
д.ф-м.н., профессор,
Ошский технологический университет им.М.М.Адышева
Ашірбаева Айжаркын Жоробековна,
ф-м.и.д., профессор,
М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ashirbaeva Aizharkyn Zhorobekovna,
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Osh technological university named after the M. Adyshev

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич,
к.*ф-м.н., доцент,*
Ошский технологический университет им.М.М.Адышева
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич,
ф-м.и.к, доцент,
М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Mambetov Zhoomart Imanalievich,
candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Osh technological university named after the M. Adyshev

Алишерова Фатима,
магистрант,

Ошский технологический университет им.М.М.Адышева
Алишерова Фатима,
магистрант,
М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Alisherova Fatima,
master student
Osh technological university named after the M. Adyshev

БИРДЕЙ КӨБӨЙТҮҮЧҮСҮ МЕНЕН ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ЧЕЧҮҮ

Аннотация. Бирдей көбөйтүүчүсү менен жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык тендемелер системасы каралган. Кошумча арумент кийирүү усулу менен баштапкы маселенин жалгыз чечиминин жашашы далилденген. Айкын мисал каралган жана коюлган маселенин чечими тургузулган.

Негизги сөздөр: Теңдемелер системасы, интегро-дифференциалдык, сызыктуу эмес, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүүусулу, вектор-функция, кысып чагылтуу.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОДИНАКОВЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Аннотация. Рассмотрена система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым сомножителем. Методом дополнительного аргумента доказано существование единственного решения начальной задачи. Рассмотрен конкретный пример и построено решение поставленной задачи.

Ключевые слова: Система уравнений, интегро-дифференциальное, нелинейное, частные производные, метод дополнительного аргумента, вектор-функция, сжатое отображение.

SOLUTION OF THE SYSTEM OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES WITH THE SAME COMBINER BY AN ADDITIONAL ARGUMENT METHOD

Abstract. A system of nonlinear partial differential integro-differential equations with the same factor is considered. By the method of an additional argument, the existence of a unique solution to the initial problem is proved. A concrete example is considered and a solution to the problem is constructed.

Key words: System of equations, integro-differential, nonlinear, partial derivatives, additional argument method, vector function, compressed map.

Исследование многих физических задач приводятся к системам дифференциальных уравнений в частных производных. Применение метода дополнительного аргумента при решении таких систем уравнений является актуальной задачей. Полученные результаты данной работы обобщают ранее полученные результаты в [1-2].

В данной работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=f_i(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_n)+\int_0^1 K_i(t,s)u_i(t,s)ds,$$
$$(t,x)\in Q_1(T)=[0,T]\times R^+,\quad R^+=[0,X]. \tag{1}$$

при начальном условии

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x),\quad x\in R^+,\quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R^+),\quad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где $\overline{C}^k(\Omega)-$ пространства функций, определенных, непрерывных и ограниченных соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k.

ТЕОРЕМА. Если

$$f_i(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n),\quad i=1,2,..,n,\quad \int_0^X \left|K_i(t,s\right|ds\le\gamma=const,$$

то существует такое $0<T_*\le T$, что задача (1)-(2) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы - ограниченности первых производных - следует, что функции φ и f удовлетворяют условию Липшица. Введем соответствующие обозначения: для $i=1,2,..,n$ функции $\varphi_i(x)\in Lip(L_i)$, и $f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_0^i|_x, M_1^i)$, $Lip(N|_u,M|_v,...)$ – класс функций из [3].

Доказательство теоремы произведем с помощью следующих лемм.

ЛЕММА 1. В пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ задача (1)-(2) эквивалентна системе интегральных уравнений (ИУ):

$$u_i(t,x)=\varphi_i(p(0,t,x))+\int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau+$$

$$+\int_0^t f_i(\tau,p(\tau,t,x),u_1(\tau,p(\tau,t,x)),u_2(\tau,p(\tau,t,x)),...,u_n(\tau,p(\tau,t,x)))d\tau \qquad (3)$$

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \qquad (4)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T)=\{(s,t,x)|\ 0\le s\le t\le T,\ x\in R\},\quad i=1,2,...,n.$

Доказательство леммы 1. Применяя метод дополнительного аргумента(МДА) для задачи (1)-(2), сводим задачу к системе ИУ (3)-(4) (см. [1-3]).

Пусть теперь $u_i(t,x)$, $p(s,t,x)$, $i=1,2,..,n$, - решение системы ИУ (3)-(4).

Тогда функции $u_i(t,x)$, $i=1,2,..,n$ удовлетворяют уравнению (1) и начальному условию (2).

В самом деле, из (3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(p(0,t,x))\left[\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$

$$+\int_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{\vartheta_1}}u_{1x}+..+f_{i_{\vartheta_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial x}\right]d\tau+$$

$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))+\int_0^1 K_i(t,s)u_i(t,s)ds.$$

Отсюда в силу соотношения $\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x}=0$, которое получается из (4), из последнего получается уравнение (1).

ЛЕММА 2. Система ИУ (3)-(4) имеет единственное решение.

Доказательство леммы. Преобразуем ИУ (3), заменяя в нем t через s, x на $p(s,t,x)$ и используя равенство, доказанное в работе Аширбаевой А.Ж., которое можно назвать «тождеством транзитивности МДА»:

$$p(s,t,p(t,\theta,x)) = p(s,\theta,x),$$
$$(s,t,\theta,x) \in Q_3(T) = \{(s,t,\theta,x) \mid 0 \le s \le t \le \theta \le T,\ x \in R\} \tag{5}$$

Тогда из (3), (4) имеем:

$$\omega_i(s,t,x) = \varphi_i(p(0,t,x)) + \int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau +$$
$$\int_0^s f_i(\tau,p(\tau,t,x),\omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),\ldots,\omega_n(\tau,t,x))d\tau, \tag{6}$$

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где обозначено

$$\omega_i(s,t,x) = u_i(s, p(s,t,x)), \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\omega_i(s,t,x) = \varphi_i(x - \int_0^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu) + \int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)u_i(\tau,s)dsd\tau \ (9)$$
$$+\int_0^s f_i(\tau,x - \int_\tau^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu, \omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),\ldots,\omega_n(\tau,t,x))d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n..$$

Система ИУ (9) при $t=\tau$ совпадает с системой ИУ (3). Согласно (8) имеем $\omega_i(t,t,x) = u_i(t,x), \quad i = 1,2,\ldots,n.$

Итак, достаточно доказать существование решение системы ИУ:

$$\omega_i(s,t,x) = \varphi_i(x - \int_0^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu) + \int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)\omega_i(\tau,\tau,s)dsd\tau \tag{10}$$
$$+\int_0^s f_i(\tau,x - \int_\tau^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu, \omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),\ldots,\omega_n(\tau,t,x))d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n..$$

Запишем систему ИУ (10) в виде одного векторного уравнения

$$\theta(s,t,x) = A(s,t,x;\theta), \tag{11}$$

в котором $\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ - вектор-функция переменных (s,t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_1 = \omega_1(s,t,x)$, $\theta_2 = \omega_2(s,t,x)$, …, $\theta_n = \omega_n(s,t,x)$, а компоненты оператора $A = (A_1, A_2,\ldots, A_n)$ определяются равенствами:

$$A_i(s,t,x;\theta) = \varphi_i(x - \int_0^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu) + \int_0^t\int_0^1 K_i(\tau,s)\omega_i(\tau,\tau,s)dsd\tau +$$
$$\int_0^s f_i(\tau,x - \int_\tau^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu, \theta_1(\tau,t,x),\theta_2(\tau,t,x),\ldots,\theta_n(\tau,t,x))d\tau, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Введем в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ норму

$$\|\theta\|_n = \max\left\{\sup\left\{\left|\theta_i(t,x)\right| : (t,x)\in Q_1(T_*))\right\} : i=1,\ldots,n\right\}. \tag{12}$$

Покажем, что уравнение (10) имеет в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T^*))$ принекотором $T^* < T$ единственное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta\|_n \le M = const$.

Имеем:

$\|A(\theta)\|_n = \max\{\|A_i(\theta)\| : i=1,..n\} \le \max\{\|\varphi_i\| + T\|f_i\| + \gamma M : i=1,..n\} = M_1.$

Оператор Aотображает шар $S(0,M)$ в себя.

Теперь возьмем произвольные два элемента $\theta^1,\theta^2 \in S(0,M)$ и оценим норму разности между их образами $A(\theta^1), A(\theta^2)$. Обозначим компоненты элементов θ^1,θ^2 через $\theta_i^1,\theta_i^2,\quad i=1,\ldots,n.$

Справедливы следующие оценки

$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Omega_i(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,$

где $\Omega_i(T) = (L_i + M_1^i + \ldots + M_N^i + \gamma)T + M_0^i\dfrac{T^2}{2}.$

Отсюда следует, что оператор A при $T^* = \min\{\Lambda(\mathrm{T};\Omega_i(T) : i=1,\ldots,n\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(0,M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (10) имеет одно и только одно решение.

Рассмотрим конкретный пример.

ПРИМЕР. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) - x + 1, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = u_1(t,x) + 1 + t, \end{cases} \tag{13}$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x) = 1, \quad u_2(0,x) = x,\ x\in R. \tag{14}$$

Сначала решаем второе уравнение системы (13) МДА.

$$u_2(t,x) = x - \int_0^t u_1(\nu, p(\nu,t,x))d\nu + \int_0^t u_1(\nu, p(\nu,t,x))d\nu + t + \frac{t^2}{2}.$$

Отсюда

$$u_2(t,x) = x + t + \frac{t^2}{2}.$$

Подставляя решение в первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = t + \frac{t^2}{2} + 1. \qquad (15)$$

Применяя МДА для задачи (15), (14) получаем решение:

$$u_1(t,x) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

В данной работе найдены методом дополнительного аргумента достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Литература

1. *Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.* Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента // Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. - № 1(48). - С.111-124.
2. *Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И.* Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – № 5. – С. 87–90.
3. *Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А.* Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.